בגרות

הצעת פתרון- בחינת הבגרות

הצעת הפתרון נכתבה על-ידי:

מליה מילוא, ערן שחר, שירי דוברין, נוי חדד, אמנון הרפז
וצביקה מלכיאלי

מורים למתמטיקה בבתי הספר של קידום.

שאלה 5

$f(x) = \ln(ae^x - be^{2x})$ $\quad a>0$

$g(x) = \ln(2 - e^x)$ $\quad b>0$

א. לשתי הפונ' אותו תחום הגדרה:

$g(x):\quad 2-e^x > 0$

$2 > e^x \quad / \ln$ $\qquad e>1$ אותו כיוון

$\ln 2 > x$

$\Downarrow$

$f(x):\quad ae^x - be^{2x} > 0$

$e^x(a - be^x) > 0$

חיובי לכל x

$a > be^x$

$\frac{a}{b} > e^x$

$\Downarrow$

$\frac{a}{b} = 2$ אותו תחום הגדרה:

$a = 2b$ //

ב. נשווה הפונ' נקודה משתפת אותה.

$$f(x) = \ln\left(2be^{x} - be^{2x}\right) = \ln\left(be^{x}(2-e^{x})\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\ln\left(be^{x}(2-e^{x})\right) = \ln(2-e^{x})$$

$$\Downarrow$$

$$be^{x}(2-e^{x}) = (2-e^{x}) \quad \Big/ \div\ 2-e^{x} \neq 0$$

$$be^{x} = 1$$

$$e^{x} = \frac{1}{b} = b^{-1} \quad \Big|\ \ln$$

$$x = \ln b^{-1} = -\ln(b)$$

נקודה משתפת $x = -\ln(b)$ הקיצון היחידה

של $f(x)$: נדרוש $f'(x) = 0$

$$f(x) = \ln\left(be^{x}(2-e^{x})\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{be^{x}(2-e^{x})} \cdot 2be^{x}\cdot 1 - be^{2x}\cdot 2 = \frac{2be^{x}(1-e^{x})}{be^{x}(2-e^{x})}$$

עבור $x = -\ln b$ הנגזרת מתאפסת:

$$f'(-\ln b) = \frac{2b\cdot e^{\ln b^{-1}}\left(1-e^{\ln b^{-1}}\right)}{be^{\ln b^{-1}}\left(2-e^{\ln b^{-1}}\right)} = 0$$

$$\Downarrow$$

$2b \cdot \cancel{b^{-1}}(1-b^{-1})=0$

$1=\frac{1}{b}$

$b=1$ //

$\Downarrow$

$a=2$ //

$\Downarrow$

קיצון $x=-\ln 1=0$

$f(x)=\ln(2e^{x}-e^{2x})$

$f(0)=\ln(2-1)=\ln 1=0$

נקודת הקיצון של $f(x)$ היא $(0,0)$

ג. $g(x)=\ln(2-e^{x})$

יורדת בכל תחום הגדרתה, משמע $g'(x)<0$
לכל x :

$g'(x)=\frac{1}{2-e^{x}}\cdot -e^{x} = \frac{-e^{x}}{2-e^{x}}$

לפי תחום ההגדרה $2-e^{x}$ חיובי לכל x

הביטוי e^x חיובי לכל x

$\Downarrow$

$g'(x)<0$ לכל x ו- $g(x)$ יורדת לכל x.

$g(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$ בכל התחום

כלומר, $g''(x)<0$ לכל x ;

$$g''(x) = \left(\frac{-e^x}{2-e^x}\right)' = \frac{-e^x(2-e^x)-(-e^x)(-e^x)}{(2-e^x)^2} =$$

$$= \frac{-e^x(2-e^x+e^x)}{(2-e^x)^2} = \frac{-2e^x}{(2-e^x)^2}$$

המכנה חיובי לכל x

e^x חיובי לכל x

$\Downarrow$

$g''(x)<0$ בכל תחום ההגדרה

ו- $g(x)$ קעורה $\cap$ בכל תחום ההגדרה.

3. $f(x) = \ln(2e^x - e^{2x})$

$g(x) = \ln(2 - e^x)$

$\Downarrow$

$f(x) - g(x) = \ln(2e^x - e^{2x}) - \ln(2 - e^x)$

ולפי חוקי לוג:

$= \ln\left(\frac{2e^x - e^{2x}}{2 - e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^x(2 - e^x)}{2 - e^x}\right) =$

$= \ln e^x = x$

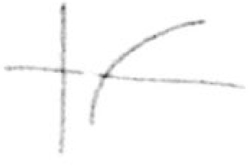
כאמור ההפרש שווה ל- x, כפי דרוש.

ה (1) אסי' מאונכות לצירים:

$f(x) = \ln(2e^x - e^{2x})$

$x < \ln 2$ תחום הגדרה

$$\lim_{x \to \ln 2^-} \ln(\underbrace{2e^x}_{e^{\ln 2^-}} - \underbrace{e^{2x}}_{(e^{\ln 2^-})^2}) = \ln(4^- - 4^+) = \ln(0^+) = -\infty$$



/ $x=\ln 2$ אסי' אנכית.

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(2e^{x}-e^{2x}) = \ln(2e^{-\infty}-e^{-\infty\cdot 2})$$

$$= \ln(\text{"}0\text{"}) = -\infty$$

/ כלומר, אין אסי' אופקית.

$g(x)=\ln(2-e^{x})$

תחום הגדרה $x<\ln 2$

אסי' אנכית:

$$\lim_{x\to\ln 2^{-}} \ln(2-e^{x}) = \ln(0^{+}) = -\infty$$

/ $x=\ln 2$ אסי' אנכית.

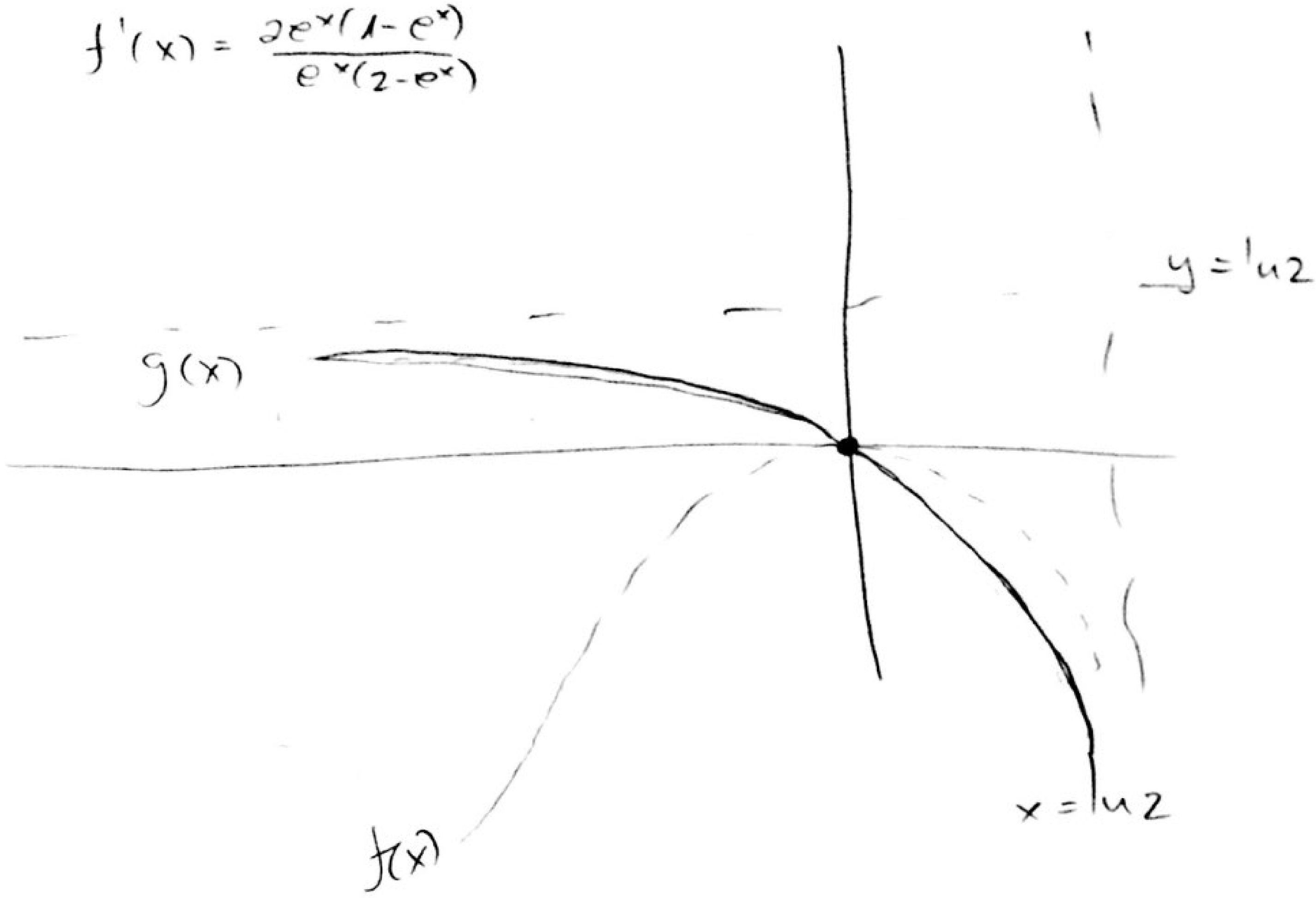
אסי' אופקית:

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(2-e^{x}) = \ln(2-e^{-\infty}) = \ln 2$$

/ כלומר $y=\ln 2$ אסי' אופקית עבור $-\infty$

$f(x) = \ln(2e^x - e^{2x})$ (2)

$f'(x) = \frac{2e^x(1-e^x)}{e^x(2-e^x)}$



$f'(-1) = \oplus$ $f'(1) = \ominus$

קיצון מסוג Max