הצעת פתרון- בחינת הבגרות

הצעת הפתרון נכתבה על-ידי:

**מליה מילוא, ערן שחר, שירי דוברין, נוי חדד, אמנון הרפז
וצביקה מלכיאלי**

מורים למתמטיקה בבתי הספר של קידום.

שאלה 7

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

a פרמטר

$0<a$ ג - 1

א. תחום הגדרה:

1) $\sqrt{x^2 - a^2} \neq 0$

2) $x^2 - a^2 \geq 0$

$$\Downarrow$$

$$x^2 - a^2 > 0$$

$$(x+a)(x-a) > 0$$

$$\boxed{x < -a \quad \text{או} \quad a < x}$$

ב. אסי' מאונכות לצירים:

אסי' אנכי:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{a}{\sqrt{0^+}} = +\infty$$

$x = a$ אסי' אנכית

$$\lim_{x \to -a^-} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{-a}{\sqrt{0^+}} = -\infty$$

$x = -a$ אסי' אנכית

אסי' אופקית:

נחלק בחזקה המובילה: $\sqrt{x^2} = |x|$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{a^2}{x^2}}} =$$

$0 < x$
$\Downarrow$
$|x| = x$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} = 1$$

$y = 1$ אסי' אופקית. $x \to \infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{a^2}{x^2}}}$$

$x < 0$
$\Downarrow$
$|x| = -x$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} = -1$$

$y = -1$ אסי' אופקית. $x \to -\infty$

ג. תחומי עליה וירידה.

נדרוש $f'(x)=0$ ונמצא נקודות קיצון:

$$f'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2-a^2} - x\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\cancel{2}x}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{x^2-a^2-x^2}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{-a^2}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}}$$

לפי תחום ההגדרה המכנה חיובי לכל x בתחום.

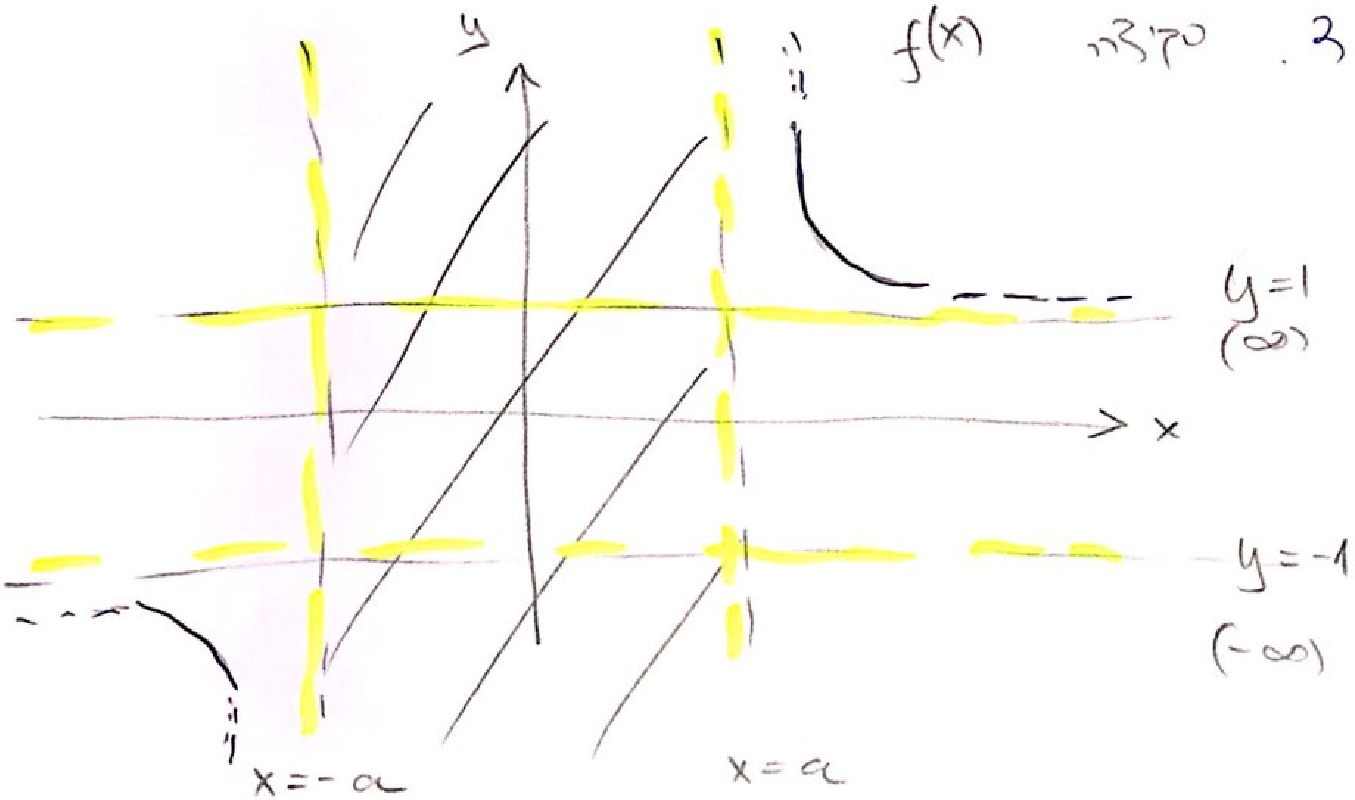
$a^2>0$ לכל a ומכאן ש- $f'(x)<0$

שלילית לכל x בתחום ההגדרה

$\Downarrow$

הפונקציה $f(x)$ יורדת בכל תחום ההגדרה. //

ג. סקיצה $f(x)$



ה. (1) אזי המונוטוניות עבור $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{-a^2}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}}$$

תחום הגדרה :

$x^2-a^2>0$

$x<-a$ או $a<x$

אס' אנכ' :

$$\lim_{x\to a^+} \frac{-a^2}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{-a^2}{0^+\cdot\sqrt{0^+}} = -\infty$$

אנכ'

$$\lim_{x\to -a^-} \frac{-a^2}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{-a^2}{0^+\cdot\sqrt{0^+}} = -\infty$$

$x=-a$ אס' אנכית.

אס' אופקי:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{-a^2}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{-a^2}{\infty} = 0$$

עבור $x\to\pm\infty$ $y=0$ אס' אופקית

(2) סימן של $f'(x)$

לפי סעיף א $f'(x)$ שלילית בכל תחום ההגדרה.

$$\int_{2a}^{3a} f(x)\,dx + \int_{-3a}^{-2a} f(x)\,dx = ?$$ .I

$$\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right) dx =$$

המונה דומה לנגזרת הפנימית של הפונ' שבתוך
שורש המכנה. (נבדוק:

$$\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\int f(x)\,dx = \sqrt{x^2-a^2} + C$$

$$\Downarrow$$

I. $$\int_{2a}^{3a} f(x)\,dx = \sqrt{x^2-a^2}\,\Big]_{2a}^{3a} =$$

$$= \sqrt{9a^2-a^2} - \sqrt{4a^2-a^2}$$

$$= \sqrt{8a^2} - \sqrt{3a^2} = a\left(\sqrt{8}-\sqrt{3}\right)$$

II. $$\int_{-3a}^{-2a} f(x)\,dx = \sqrt{x^2-a^2}\,\Big]_{-3a}^{-2a} =$$

$$= \sqrt{4a^2-a^2} - \sqrt{9a^2-a^2}$$

$$= a\left(\sqrt{3} - \sqrt{8}\right)$$

$$= \smile$$

הביטוי המבוקש $= a\left(\sqrt{8}-\sqrt{3}\right) + a\left(\sqrt{3}-\sqrt{8}\right)$

$= 0.$

התשובה אינה מפתיעה שכן הפונ'

$f(x)$ היא אי זוגית.

זה לפי הסרטוט וגם:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$f(x) = -f(-x)$$

השטחים זהים בערכם אבל הפוכים

בסימנם שכן עבור x-ים שליליים

הפונ' $f(x)$ מתחת לציר x.

5. $a=0$:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|}$$

(1) תחום הגדרה :

$|x| \neq 0$

$x \neq 0$

(2) סקיצה :

$$|x| = \begin{cases} x & 0 \le x \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & 0 < x \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$