- בגרות ב: מתמטיקה
- מספר יחידות הבגרות: 5 יח"ל
- שם הפרק בבחינה: שאלון ראשון, 806
  שאלה 2 מתוך 8
- כותבי פתרון הבחינה: מליה מילוא, איתן אביטל, ערן שחר, מורן גבאי, שירי דוברין, צביקה מלכיאלי
- מועד הבחינה: 13/7/17
- שעת הבחינה : 12:45

2. נתונה סדרה כללית a_n .

נסמן ב־ S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n .

נתון: $S_n = k - \frac{1}{3^{n+1}}$ לכל n טבעי. k הוא מספר קבוע.

א. הבע את a_1 ואת האיבר הכללי a_n עבור $1 < n$ באמצעות n ו־ k במידת הצורך.

ב. מצא את k שעבורו הסדרה a_n היא סדרה הנדסית. נמק.

נגדיר: $T = a_2^2 + a_5^2 + a_8^2 + \dots$ (סכום ריבועֵי כל איבר שלישי בסדרה a_n החל ב־ a_2).

ג. חשב את T .

שאלה 2

סדרה a_n

סכום n האיברים הראשונים S_n

$$S_n = K - \frac{1}{3^{n+1}}$$

K קבוע

א. להביע את a_1 ו- a_n באמצעות n ו- K

$$\underbrace{\underbrace{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}}_{S_{n-1}}, a_n}_{S_n}, a_{n+1}$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = K - \frac{1}{3^{n+1}} - \left(K - \frac{1}{3^{n-1+1}}\right)$$

$$= -\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^n}$$

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3^{n+1}} \quad //$$

$a_1 = S_1 = k - \frac{1}{3^{1+1}} = k - \frac{1}{3^2}$

$a_1 = k - \frac{1}{9}$ //

ב. מצאו את k עבורו הסדרה הנדסית.

בסדרה הנדסית המנה בין כל איבר לקודמו,
קבועה, פרט לאיבר הראשון.
מנת הסדרה והאיבר הראשון שונים מאפס.

האיבר הכללי a_n אינו תלוי ב- k
ומכאן שגם מנת הסדרה אינה תלויה ב- k.
נדרוש שהאיבר הראשון יהיה שונה מאפס:

$a_1 = k - \frac{1}{9} \neq 0$

$k \neq \frac{1}{9}$

אם הסדרה הנדסית, האיבר הכללי בה
יקיים איבר כלל בסדרה הנדסית:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+2}}}{\frac{2}{3^{n+1}}} = \frac{1}{3}$$

$$\Downarrow$$

ונדרוש :

$$\frac{2}{3^{n+1}} = \left(k - \frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\frac{2\cdot 3^{n-1}}{3^{n+1}} = k - \frac{1}{9}$$

$$k = \frac{1}{9} + \frac{2\cdot\frac{1}{3}}{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

כלומר, עבור $k=\frac{1}{3}$ מתקבל

סדרה הנדסית.

ג. $T = a_2^2 + a_5^2 + a_8^2 + \dots$

כל איבר שלישי בסדרה החל מ- a_2.

$a_2^2, \quad a_{n+3}^2, \quad a_{n+6}^2, \quad a_{n+9}^2, \dots$

לפי סעיף א:

$a_n = \frac{2}{3^{n+1}} \qquad (a_n)^2 = \frac{4}{3^{2n+2}}$

$\Downarrow$

$a_{n+3} = \frac{2}{3^{n+3+1}} = \frac{2}{3^{n+4}}$

$(a_{n+3})^2 = \frac{4}{3^{2n+8}}$

$$\frac{(a_{n+3})^2}{(a_n)^2} = \frac{\frac{\cancel{4}}{\cancel{3^{2n}} \cdot 3^8}}{\frac{\cancel{4}}{\cancel{3^{2n}} \cdot 3^2}} = \frac{3^2}{3^8} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$$

כלומר, הסכום הוא של סדרה הנדסית

(לפי ההגדרה מהסעיף הקודם)

מכיון שמנת הסדרה $q = \frac{1}{729} < 1$

מדובר בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת

$$\Downarrow$$

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

האיבר הראשון בסכום :

$$a_2^{\,2} = \left(\frac{2}{3^{2+1}}\right)^2 = \frac{4}{3^6} = \frac{4}{729}$$

$$\Downarrow$$

$$S_\infty = \frac{\frac{4}{729}}{1-\frac{1}{729}} = \frac{4}{728} = \frac{1}{182}$$

ומכאן - $T = \frac{1}{182}$ //