הצעת פתרון- בחינת הבגרות במתמטיקה

קיץ 2015- שאלון 035807

הצעת הפתרון נכתבה על-ידי איתי הרטמן, אמנון הרפז, אוהד ריטרבנד,
אסא קסלר, נופר קריסטל, צביקה מילכיאלי, רימה דרייזין, אמנון בר-כוכבא

1. נתונה פרבולה המקיימת: $y^2=2px$, $p>0$.

נקודה D נמצאת על הפרבולה ברביע הראשון במרחק 8 מציר ה־ x .

א. הבע באמצעות p את המרחק של הנקודה D מן המדריך של הפרבולה.

מעבירים שני מעגלים: מעגל ראשון שמרכזו בנקודה D ורדיוסו $p+4$,

מעגל שני שמרכזו במוקד F של הפרבולה.

המעגל השני משיק מבחוץ למעגל הראשון ומשיק גם לציר ה־ y .

ב. היעזר בסעיף א, ומצא את משוואת הפרבולה.

ג. נקודה K נמצאת על הפרבולה שאת משוואתה מצאת.

דרך הנקודה K העבירו משיק לפרבולה ואנך למשיק.

המשיק והאנך חותכים את ציר ה־ x בנקודות T ו־ S בהתאמה.

המרחק בין הנקודה T לנקודה S הוא 16 .

מצא את השיעורים של הנקודה K . (מצא את שתי האפשרויות.)

בתשובתך תוכל להשאיר שורש במידת הצורך.

שאלה 1

פרבולה: $y^2=2px$, $p>0$ $\Leftarrow$ $x \ge 0$

נקודה D: $D(x_D, 8)$

א. מדריך הפרבולה: $x=-p/2$

מרחק הנקודה D מהמדריך:

$$\boxed{d = x_D + \frac{p}{2}}$$

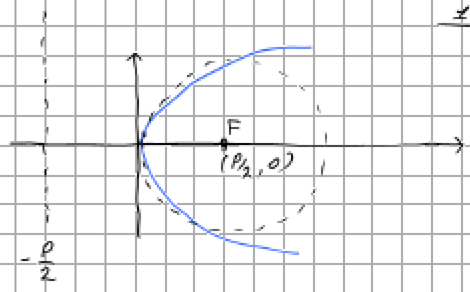
כיוון ש D על הפרבולה:

$$y_D^2 = 2px_D \Longrightarrow x_D = \frac{8^2}{2p} = \frac{32}{p}$$

נציב במשוואה למרחק:

$$d = \frac{32}{p} + \frac{p}{2} = \boxed{\frac{64+p^2}{2p}}$$

המשך שאלה 1



נתחיל מהמעגל השני: מרכזו במוקד $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

והוא משיק לציר y

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

מרכז המעגל הראשון (שאינו מופיע בשרטוט)

נמצא בנקודה D, מעגל זה משיק למעגל

השני (לפי הנתון) לכן:

המרחק מנקודה D לנקודה F שווה

לסכום רדיוסי המעגלים, לפי הגדרת הפרבולה

המרחק של נק' D למוקד שווה למרחקה

מהמדריך (סעיף א'):

$$\underbrace{\frac{p}{2}}_{\text{רדיוס המעגל השני}} + \underbrace{(p+4)}_{\text{רדיוס המעגל הראשון}} = \underbrace{\frac{64 + p^2}{2p}}_{\text{סעיף א'}}$$

פתרון המשוואה :

$$p^2 + 2p^2 + 8p = 64 + p^2$$

$$2p^2 + 8p - 64 = 0 \implies p_1 = 4$$

$$\cancel{p_2 = -8} \quad (\text{נתון } p>0)$$

משוואת הפרבולה : $y^2 = 8x$

ג. נקודה k : $k\left(\frac{v^2}{8}, v\right)$

שיפוע המשיק : $m_{\text{משיק}} = \frac{4}{v}$

שיפוע הנורמל : $m_{\text{נורמל}} = -\frac{v}{4}$

משוואת המשיק : $y - v = \frac{4}{v}\left(x - \frac{v^2}{8}\right)$

נקודה T : $-v = \frac{4}{v}x_T - \frac{v}{2}$

$$\boxed{x_T = -\frac{v^2}{8}}$$

משוואת הנורמל : $y - v = -\frac{v}{4}\left(x - \frac{v^2}{8}\right)$

נקודה S : $-\cancel{v} = -\frac{\cancel{v}}{4}x_S + \frac{v^{\cancel{3}\,2}}{32}$

$$\boxed{x_S = 4 + \frac{v^2}{8}}$$

המשך סעיף ג' שאלה 1

נתון: המרחק בין T ו־S הוא 16.

$$4+\frac{v^2}{8}+\frac{v^2}{8}=16$$

$$\frac{v^2}{4}=12 \qquad v^2=48$$

שיעורי נקודה K:

$(6,\sqrt{48})$

או

$(6,-\sqrt{48})$

2. נתון ישר ℓ שמשוואתו $\underline{x}=(1,2,-4)+t(1,-2,2)$.

מישור π מאונך לישר ℓ, וחותך את ציר ה־ x בנקודה A.

נקודה A נמצאת על הקרן החיובית של ציר ה־ x במרחק 8 מראשית הצירים O.

נקודות B ו־ C הן נקודות החיתוך של המישור π עם ציר ה־ y ועם ציר ה־ z בהתאמה.

א. (1) מצא את האורך של כל אחד משׁשׁת המקצועות של הפירמידה $OABC$.

(2) האם הפירמידה $OABC$ היא ישרה? נמק.

ב. נקודה D נמצאת על הקטע AC כך ש־ OD חוצה־זווית AOC.

מהו המצב ההדדי בין הישר OD לישר BC? נמק.

שאלה 2

ישר ℓ : $\underline{x} = (4,2,-4)+t(1,-2,2)$

מישור π : $\pi \perp \ell \Leftarrow \underline{n} = (1,-2,2)$

וחותך את ציר x בנק' A .

נקודה A : $(8,0,0)$

B, C – נקודות החיתוך של π עם ציר y (B)

וציר z (C) .

משוואת המישור : $x-2y+2z+d=0$

נק' A על המישור : $8+d=0$

$$\Downarrow$$

$d=-8$

משוואת המישור המלאה : $x-2y+2z-8=0$

נק' B : $0-2y_B+2\cdot 0-8=0 \Rightarrow y_B=-4$

$B=(0,-4,0)$

נק' C : $0-2\cdot 0+2\cdot z_C-8=0 \Rightarrow z_C=4$

$C=(0,0,4)$

א.

(1) אורך מקצועות הפירמידה:
(חישוב לפי מרחק בין שתי נקודות)

$OA = 8$

$OB = 4$

$OC = 4$

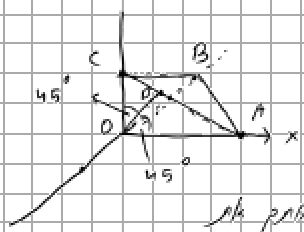
$AB = 4\sqrt{5}$

$AC = 4\sqrt{5}$

$BC = 4\sqrt{2}$

(2) הפירמידה אינה ישרה אין 3 מקצועות שווים.

ב. נקודה D על AC כך ש OD חוצה זווית $\sphericalangle AOC$.



הישרים BC ו OD מצטלבים.

נימוק:

BC מוכל במישור z-y וחותך את ציר z בנקודה C.

OD מוכל במישור z-x וחותך את ציר z בנקודה O. הנקודות O ו C שונות...

3. נתונה המשוואה $z^n = 8$, z הוא מספר מרוכב, $2 < n$.

א. הוכח כי n הפתרונות של המשוואה הם קדקודים של מצולע משוכלל.

המספרים z_0 , z_1 , z_2 , z_3 הם ארבעה קדקודים עוקבים מבין n הקדקודים של המצולע שבסעיף א (לפי סדר המספרים הרשום).

z_0 הוא מספר ממשי וחיובי. z_1 נמצא במישור גאוס ברביע הראשון.

נתון: $z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -\sqrt{8}\,i$.

ב. מצא את הערך של n .

שאלה 3

משוואה: $z^n = 8$, z מרוכב

$n > 2$

$$\Downarrow$$

$$z^n = 8\,cis\,(0 + 360^\circ k)$$

א. פתרונות המשוואה:

$$z_k = \sqrt[n]{8} \cdot cis\left(\frac{360^\circ k}{n}\right)$$

כל אחד מהפתרונות (קדקדי המצולע)

נמצא במרחק זהה מהראשית והזווית

בין כל שני קטעים המחברים קודקודים

סמוכים למרכז זהה ושווה ($\frac{360^\circ}{\text{מספר הקודקודים}}$

ב. z_0 – ממשי וחיובי: $z_0 = \sqrt[n]{8}$

$$z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = \left(\sqrt[n]{8}\right)^4 \cdot cis\left(0 + \frac{360}{n} + \frac{720}{n} + \frac{1080}{n}\right.$$

$$= \left(\sqrt[n]{8}\right)^4 cis\left(\frac{2160}{n}\right) = -\sqrt{8}\,i$$

$\left(\sqrt[n]{8}\right)^4 = \sqrt{8}$; $\frac{2160}{n} = 270^\circ$ $8cis(27$

שני התנאים נותנים: $n = 8$

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. נתונה הפונקציה $f(x) = a \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}$ המוגדרת לכל x . a הוא פרמטר גדול מ־ 0 .

א. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי־זוגית.

ב. (1) הבע באמצעות a (במידת הצורך) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x = 1$ ו־ $x = -1$, אם נתון כי $a = 2$.

ד. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = [f(x)]^2$.

מצא את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגן.

שאלה 4

$$f(x) = axe^{-\frac{x^2}{8}} \quad , \quad a>0$$

א.

$$f(-x) = a\cdot(-x)\cdot e^{-\frac{(-x)^2}{8}} =$$

$$= -axe^{-\frac{x^2}{8}} = -f(x)$$

מוכח.

ב. (1)

$u = ax \qquad u' = a$

$v = e^{-\frac{x^2}{8}} \qquad v' = -\frac{1}{8}\cdot 2x\, e^{-\frac{x^2}{8}}$

$$f'(x) = ae^{-\frac{x^2}{8}} - \frac{1}{4}ax^2\cdot e^{-\frac{x^2}{8}} =$$

$$= ae^{-\frac{x^2}{8}}\left(1-\frac{x^2}{4}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

$$f''(x) = -\frac{ax}{4}e^{-\frac{x^2}{8}}\left(1-\frac{x^2}{4}\right) - ae^{-\frac{x^2}{8}}\cdot\frac{x}{2}$$

$f''(2) < 0 \Leftarrow$ $x=2$ נקודת מקסימום

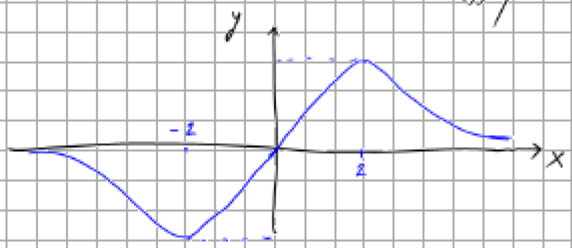
$f''(-2) > 0 \Leftarrow$ $x=-2$ נקודת מינימום.

המשך שאלה 4

נקודת מקסימום: $\left(2,\ 2ae^{-1/2}\right)$

נקודת מינימום: $\left(-2,\ -2ae^{-1/2}\right)$

ב) סקיצה:



ג. נתון $a=2$, השטח המבוקש בין -1 ל 1.

נוכל לחשב את השטח מ 0 ל 1

ולהכפיל ב 2 (הפונ' אי זוגית!)

$$S = 2\cdot\int_0^1 2x e^{-x^2/8}\,dx = 2\cdot 8\int_0^1 \frac{2}{8}x e^{-x^2/8}\,dx =$$

$$= 16\cdot\left[-e^{-x^2/8}\right]_0^1 = 16\left[-e^{-1/8}-(-1)\right]$$

השטח המבוקש: $\boxed{S = 1.88}$ יח'

.3 $g(x) = [f(x)]^2$

שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $g(x)$:

$x=-2$ ו $x=2$ נקודות מקסימום.

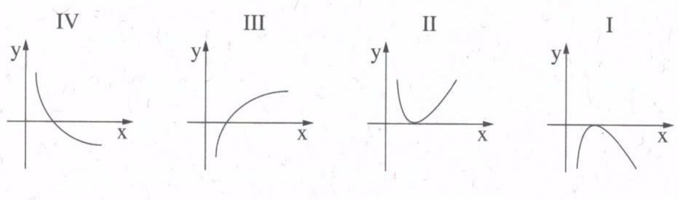
$x=0$ נקודת מינימום.

5. נתונה הפונקציה $f(x) = a \cdot x \cdot \ell nx - x^2$, a הוא פרמטר גדול מ־ 0 .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הראה כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד, והבע את שיעור ה־ x שלה באמצעות a .

ג. איזה מבין הגרפים I , II , III , IV שלפניך מתאים לגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$? נמק.



ד. (1) אם שיפוע המשיק בנקודת הפיתול של $f(x)$ שווה ל־ 0 , מצא את הערך של a .

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור הערך של a שמצאת.

(3) האם עבור הערך של a שמצאת, יש לפונקציה $f(x)$ נקודות קיצון? נמק.

ה. מצא עבור אילו ערכים של a שיפוע המשיק בנקודת הפיתול של $f(x)$ גדול מ־ 0.

שאלה 5

$$f(x) = ax\ln x - x^2$$

א. תחום הגדרה : $x > 0$

ב. $f' = a\ln x + a - 2x$

$f'' = \frac{a}{x} - 2 = 0 \Rightarrow x = a/2$

נבדוק את f'' : $f''(\frac{a}{4}) > 0$ ✓

$f''(a) < 0$

לפונקציה נקודת פיתול אחת ב $x = \frac{a}{2}$

ג. לפי הבדיקה בסעיף ב' ניתן לראות

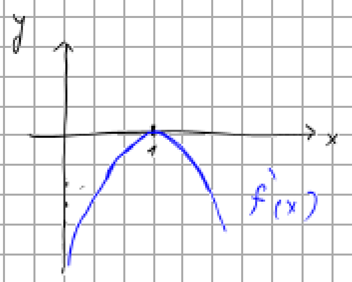
כי רק גרף IV מתאים.

ד. (1) : $f'(\frac{a}{2}) = 0$

$a\ln\frac{a}{2} = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$

המשך שאלה 5

ד. (2)



(3) לכן עבור זה אין ל- $f(x)$ נקודת קיצון. הנגזרת אומנם מתאפסת אבל סימנה אינו משתנה סביב הנקודה..

ה. נב׳ עבור אילו ערכי של a : $f'(\frac{a}{2}) > 0$

$$a \ln \frac{a}{2} > 0$$

חיובי

$$\Downarrow$$

$$\frac{a}{2} > 1 \Rightarrow a > 2$$