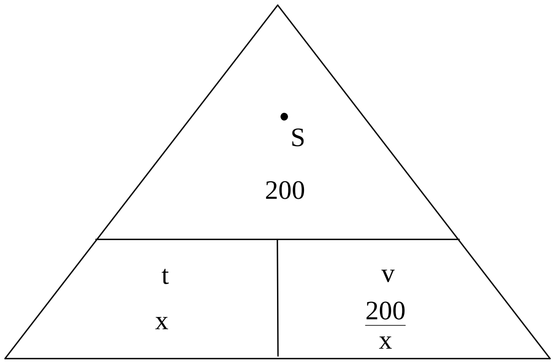
תשובות מבחן במתמטיקה שאלון 003 :

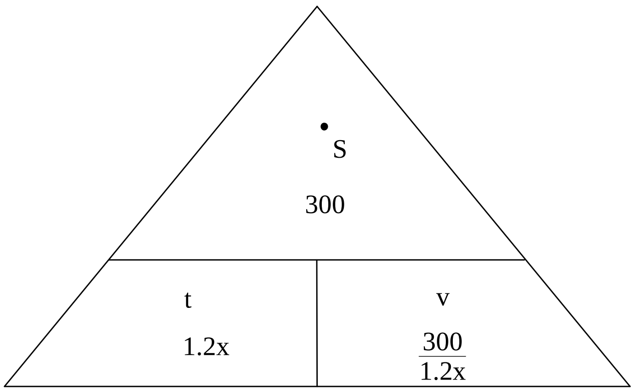
תרגיל 1 :

נארגן את הנתונים בתבנית המקיימת את הקשר :דרך כפול זמן שווה לדרך.

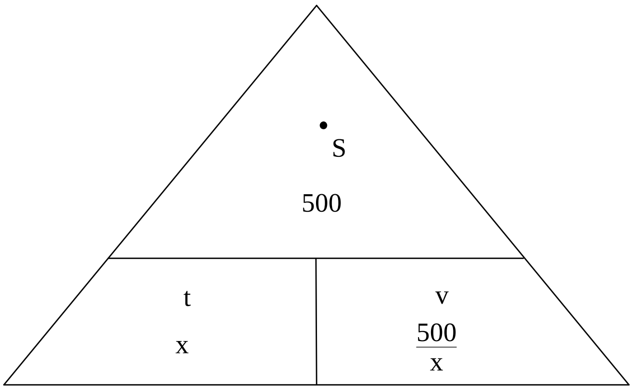
חלק ראשון במהירות רגילה :



חלק שני במהירות גדולה פי 1.2 :



כל הדרך במהירות רגילה :



נבנה את המשוואה ע״י השוואת זמני נסיעה בפועל ונשתמש בנתון ״התעכבה חצי שעה.

$$\frac{1}{2}+\frac{300}{1.2x}+\frac{200}{x}=\frac{500}{x} \quad / \cdot 2.4x$$

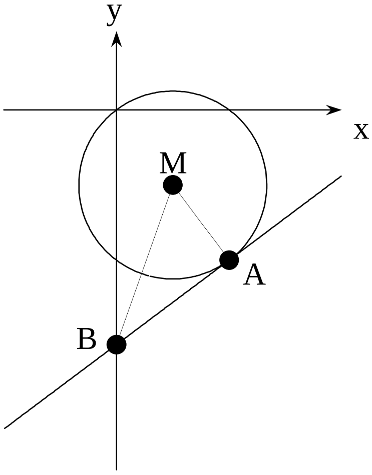
$$1.2x+600+480=1200$$

$$1.2x=120$$

$$x=100$$

מהירות הנסיעה 100 קמ״ש

תרגיל 2 :



א.

נתון נקודה $A(6,-8)$

משוואת המעגל : $(x-3)^2+(y+4)^2=25$ מעגל שרדיוסו : $r=5$

ומרכזו : $(3,-4)$

משוואת הישר MA

נמצא את שיפוע הרדיוס העובר דרך הנקודות $M(3,-4)$, $A(6,-8)$

נשתמש בנוסחה $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$:

$m(3,-4)$, $A(6,-8)$

$$m=\frac{-8-(-4)}{6-3}=-\frac{4}{3}$$

את הנתונים נציב במשוואת הישר $y-y_1=m(x-x_1)$:

$$\boxed{\begin{matrix} m=-\frac{4}{3} \\ y_1=-4 \\ x_1=3 \end{matrix}} \Rightarrow y+4=-\frac{4}{3}(x-3) \Rightarrow y+4=-\frac{4}{3}x+4$$

$$\boxed{y=-\frac{4}{3}x}$$

ב. שיפוע המשיק הופכי ונגדי לרדיוס בנקודת ההשקה.

את הנתונים נציב במשוואת הישר $y-y_1=m(x-x_1)$:

$$\boxed{\begin{matrix} m=\frac{3}{4} \\ y_1=-8 \\ x_1=6 \end{matrix}} \Rightarrow y+8=\frac{3}{4}(x-6) \Rightarrow y+8=\frac{3}{4}x-\frac{18}{4}$$

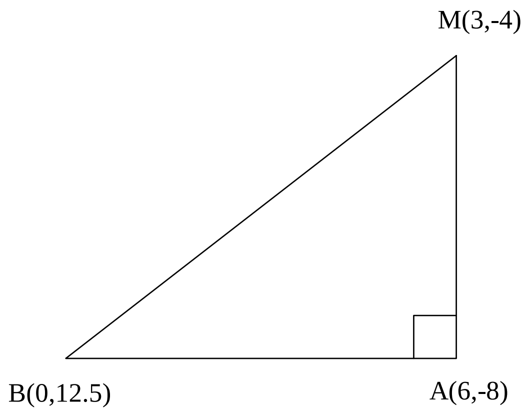
$$\boxed{y=\frac{3}{4}x-12.5}$$

ג. על מנת לקבל את שטח המשולש ABM יש לזכור שהזווית $\sphericalangle MAB = 90^\circ$ מתקבל משולש ישר זוית ויש למצוא את הניצבים.

נקודה B חיתוך עם ציר ה - y של המשיק.

נציב $x = 0$ ב - $y = \frac{3}{4}x - 12.5$.

$$y = \frac{3}{4}(0) - 12.5 \Rightarrow B(0, -12.5)$$



מציאת הניצבים AM ו - AB .

AM שווה לרדיוס:

AM=5

את AB נמצא ע"י הצבה בנוסחת המרחק: $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$$d^2 = (0-6)^2 + (-12.5+8)^2$$
$$d^2 = 56.25$$
$$d = \sqrt{56.25} = 7.5$$

נציב בנוסחת השטח: $s = \frac{a \cdot h}{2}$

$$s = \frac{5 \cdot 7.5}{2} = 18.75$$

שטח משולש 18.75 יח"ש

תרגיל 3:

$$f(x)=3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}$$

א. מכנה שונה מאפס $x\neq 0$

ב. חיתוך ציר x y=0

$$0=3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\ /\cdot x^2$$

$$0=3x^2-4x+1[\ \ ]$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(3)(1)}}{2(3)}\ \frac{4\pm 2}{6}=\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\frac{1}{3}\end{cases}$$

נקודות חיתוך עם הצירים: $(1,0)$, $(\frac{1}{3},0)$

נמצא נקודות קיצון לפונקציה על-ידי גזירת הפונקציה והשוואת הנגזרת ל-0. נגזור את הביטויים $\frac{1}{x^2}$ ו- $\frac{4}{x}$ לפי הכלל: $\left(\frac{k}{f(x)}\right)'=-\frac{kf'(x)}{(f(x))^2}$.

ג.

$$f'(x)=0-\left(-\frac{4}{x^2}\right)+\left(-\frac{2x}{x^4}\right)$$

$$f'(x)=\frac{4}{x^2}-\frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}3}}=\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}$$

נשווה את הנגזרת ל-0:

$$\frac{{}^{x/}4}{x^2}-\frac{{}^{1/}2}{x^3}=0\ /\cdot x^3$$

$$4x-2=0$$

$$x=\frac{2}{4}$$

$$x=0.5$$

קביעת מקסימום ומינימום ע״י טבלת סימנים לנגזרת הראשונה: $f'(x)=\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}$

$$f'(x)=\frac{4}{(-1)^2}-\frac{2}{(-1)^3}>0+$$

$$f'(x)=\frac{4}{(0.3)^2}-\frac{2}{(0.3)^3}<0-$$

$$f'(x)=\frac{4}{(1)^2}-\frac{2}{(1)^3}>0+$$

x	−1	0	0.3	0.5	1
y′	+		−	0	+
y	↗		↘	min	↗

ולכן בנקודה שבה $x = 0.5$ יש מינימום.

נמצא את ערך ה-y על ידי הצבת $x = 0.5$ בפונקציה:

מציאת y: נציב ב- $y = 3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}$

$$y = 3 - \frac{4}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$y = 3 - 8 + 4 = -1 \Rightarrow \min\left(\frac{1}{2}, -1\right)$$

נקודת קיצון: $\boxed{\min(0.5,\ -1)}$

ד. תחומי עליה וירידה נסתכל בטבלה: עבור $x > 0$

תחומי עלייה	תחומי ירידה
$0.5 < x < +\infty$	$0 < x < 0.5$

עבור $x < 0$ פונקציה עולה.

תרגיל 4:

א. נזהה את הפונקציות ניתן לעשות זאת במספר אופנים.

ניתן להציב $x=3$ או $x=7$ ולבדוק מתי התוצאה היא $y=9$.

או לבדוק חיתוך עם ציר ה־ x.

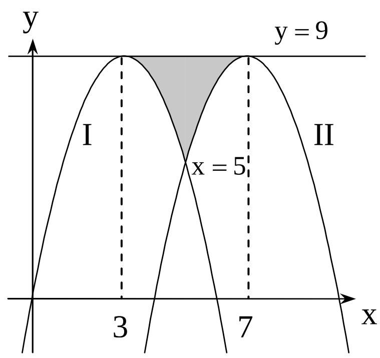
נבדוק חיתוך עם ציר ה־ x של הפונקציה $f(x)$:

$$0=-x^2+6x$$

$$0=-x(x-6) \begin{cases} x_1=0 \Rightarrow (0,0) \\ x_2=6 \Rightarrow (6,0) \end{cases}$$

$f(x)$ עוברת דרך ראשית הצירים לכן שייכת לגרף I.

$g(x)$ שייכת לגרף II.



ב. מציאת השטח:

$$s=\int_3^7 9dx-\int_5^7(-x^2+14x-40)dx-\int_3^5(-x^2+6x)dx$$

$$\int_3^7 9dx=9x\Big|_3^7=[9(7)]-[9(3)]=36$$

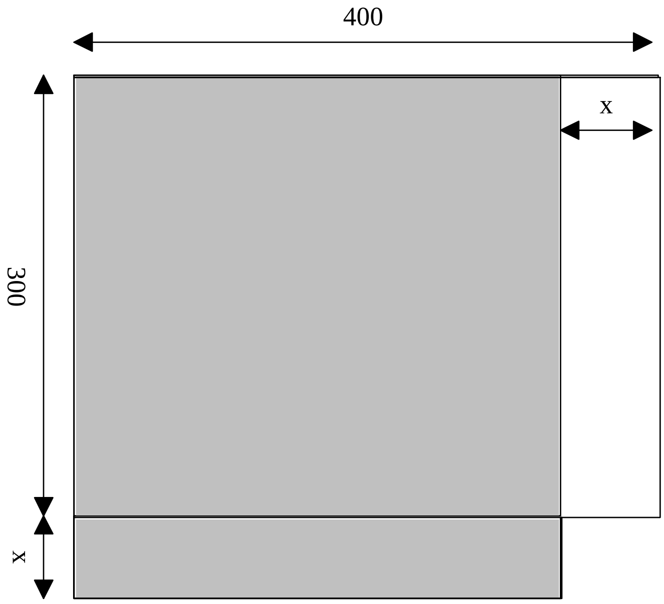
$$\int_5^7(-x^2+14x-40)dx=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-40x\Big|_5^7=\left[-\frac{(7)^3}{3}+\frac{(7)^2}{2}-40(7)\right]-\left[-\frac{(5)^3}{3}+\frac{(5)^2}{2}-40(5)\right]=15\frac{1}{3}$$

$$\int_3^5(-x^2+6x)dx=-\frac{x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}\Big|_3^5=\left[-\frac{(5)^3}{3}+\frac{6(5)^2}{2}\right]-\left[-\frac{(3)^3}{3}+\frac{6(4)^2}{2}\right]=15\frac{1}{3}$$

$$s=36-15\frac{1}{3}-15\frac{1}{3}=5\frac{1}{3}$$

שטח שווה ל־ $5\frac{1}{3}$ יח"ש

תרגיל 5 :



נשתמש בנוסחת השטח : אורך כפול רוחב שווה שטח מלבן.
אורך לפני 400 אורך אחרי הורדת x : $400-x$.
רוחב לפני 300 רוחב אחרי הוספת x : $300+x$.
נבנה את הפונקציה המבוקשת("מקסימום שטח של חלקה חדשה").

$$f(x)=(300+x)(400-x)$$

נפתח סוגריים :

$$f(x)=120000-300x+400x-x^2$$

נגזור :

$$f'(x)=-300+400-2x$$

נשווה לאפס :

$$100-2x=0$$
$$2x=100$$
$$x=50$$

בדיקת מקסימום או מינימום

x	10	50	60
y'	+	0	-
y	↗		↘

על מנת לקבל שטח מקסימלי $x=50$

תרגיל 6 :

א. נקודות הקיצון של פונקציה מתקבלות כאשר הנגזרת שווה ל-0

$$y=\frac{1}{2}x^4-4x^2+3$$

$$y'=2x^3-8x$$

$$2x^3-8x=0$$

$$x(2x^2-8)=0$$

$$x=0 \qquad 2x^2-8=0\Rightarrow x^2=\frac{8}{2}\Rightarrow x=\pm\sqrt{4} \quad x_1=2,\ x_2=-2$$

$x=0$

$x=2$

$x=-2$

בדיקת מקסימום מינימום נציב בנגזרת הראשונה :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	min	↗	max	↘	min	↗

נקבל: $\min x=-2$, $\max x=0$, $\min x=2$

ב. תחומי עליה וירידה נסתכל בטבלה :

תחומי עלייה	תחומי ירידה
$-2<x<0$ או $2<x<+\infty$	$-\infty<x<-2$ או $0<x<2$

נציב את הנקודות שמצאנו בפונקציה המקורית :

$$x=-2\ ,\ y=\frac{1}{2}(-2)^4-4(-2)^2+3=-5\Rightarrow(-2,-5)$$

$$x=0\ ,\ y=\frac{1}{2}(0)^4-4(0)^2+3=3\Rightarrow(0,3)$$

$$x=2\ ,\ y=\frac{1}{2}(2)^4-4(2)^2+3=-5\Rightarrow(2,-5)$$

ג. על פי צורת הגרף כפי שמתקבל מהטבלה : המינימום המוחלט הוא -5 לכן הפונקציה לא עוברת דרך $y=-6$

הגרף נראה כך :