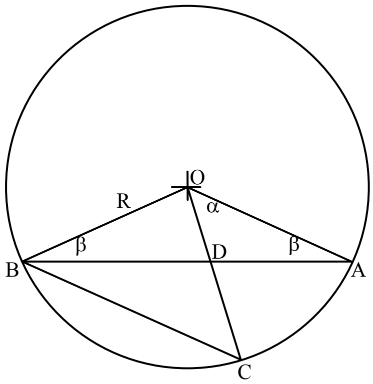
תשובות מבחן 004 קיץ 2008



<u>001</u>

AB ו – CD הם מיתרים במעגל שמרכזו בנקודה O.

OC ו – AB נחתכים בַּנקודה D (ראו שרטוט).

נתון: $OB = R$, $\sphericalangle AOD = \alpha$, $\sphericalangle OAD = \beta$.

א. הביעו באמצעות α ו - β את היחס בין השטחים של המשולשים $\frac{S_{BOD}}{S_{BOC}}$.

ב. נתון: $\alpha = \beta$ וכן $\frac{S_{BOD}}{S_{BOC}} = \frac{2}{3}$. מִצְאו את α .

תשובה

(א) יהא DO הבסיס של משולש BOD ויהא OC הבסיס של המשולש BOC ואז לשני המשולשים גובה משותף. כידוע במצב שכזה, היחס בין שטחי המשולשים הינו בדיוק היחס שבין אורכי הבסיסים. הבסיס האחד הוא $OC = R$. את הבסיס השני, DO נחשב באמצעות משפט הסינוס במשולש BOD:

$$\frac{DO}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin(\alpha+\beta)} \Rightarrow \underline{\underline{DO = \frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}}}$$

היחס הנדרש הוא כאמור:

$$\frac{S_{BOD}}{S_{BOC}} = \frac{DO}{OC} = \frac{\cancel{R}\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{\frac{S_{BOD}}{S_{BOC}} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}}$$

(ב) אם $\alpha = \beta$ וכן $\frac{S_{BOD}}{S_{BOC}} = \frac{2}{3}$ אז

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\alpha)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\cancel{\sin\alpha}}{2\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 41.41^\circ}$$

(1א) האסימפטוטה האנכית: מכנה הפונקציה מתאפס.

$$\sin x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = \pi k}}$$

אסימפטוטות אנכיות נקבל איפא ב - $x = 0$ וב - $x = \pi$

(2א) הפונקציה חותכת את ציר ה - x כאשר $f(x) = 0$:

$$0 = \sin x - 1 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \tfrac{\pi}{2} + 2\pi k$$

בתחום הנקוב נקבל נקודת אפס אחת בלבד :

$$x = \tfrac{\pi}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\left(\tfrac{\pi}{2}, 0\right)}}$$

(3א) כדי למצוא נקודת קיצון, נגזור ונשווה את הנגזרת לַאֶפס :

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \sin x - \cos x(\sin x - 1)}{\sin^2 x}$$

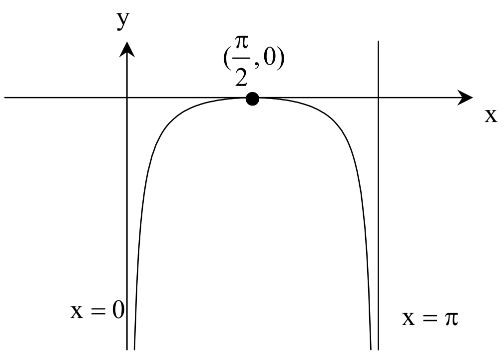
$$\frac{\cancel{\cos x \cdot \sin x} - \cancel{\cos x \cdot \sin x} + \cos x}{\sin^2 x} = \underline{\underline{\frac{\cos x}{\sin^2 x}}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = \tfrac{\pi}{2} + \pi k}}$$

בתחום הנתון נקבל נקודה אחת בלבד : $\underline{\underline{\tfrac{\pi}{2}, 0}}$. כדי לקבוע את סוג הקיצון, נחשב את $f''(x)$ בנקודת קיצון :

$f''(x) = \dfrac{-\sin x}{\sin^2 x}$; בנקודת קיצון $\quad f''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{-\sin \frac{\pi}{2}}{\sin^2 x} < 0 \Rightarrow \boxed{\left(\tfrac{\pi}{2}, 0\right) \max.}$

(ב) סקיצה של גרף הפונקציה :



003

(1א) למציאת נקודת קיצון נגזור הפונקציה ונשווה הנגזרת לאפס :

$$f'(x)=\frac{-2x\left(x^2-2\right)-2x\left(a-x^2\right)}{\left(x^2-2\right)^2}=\frac{-2x\left(\cancel{x^2}-2+a-\cancel{x^2}\right)}{\left(x^2-2\right)^2}=\underline{\underline{\frac{-2x(a-2)}{\left(x^2-2\right)^2}}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow -2x(a-2)=0\Rightarrow 2x=0\Rightarrow \underline{\underline{x=0}}$$

כדי למצוא את שיעור ה - y של נקודת קיצון, נציב בפונקציה $x=0$:

$$f(0)=\frac{a-0}{0-2}=-\frac{a}{2}\Rightarrow \underline{\underline{\left(0,-\frac{a}{2}\right)}}$$ שיעורי נקודת הקיצון

(2א) אם ישר אופקי משיק לפונקציה הרי שהוא עובר בְּנקודת קיצון. מתוצאות הגזירה ניתן ללמוד כי לפונקציה יש רק נקודת קיצון אחת. אשר על כן, שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה הם : $(0\ ,-4.5)$

נשווה בין השיעורים של שתי נקודות הקיצון ונקבל :

$$-\frac{a}{2}=-4.5\Rightarrow \boxed{a=9}\quad f(x)=\frac{9-x^2}{x^2-2}$$ הפונקציה היא עתה

(1ב) הפונקציה מוגדרת כאשר המכנה שונה מאפס :

$$x^2-2\neq 0\Rightarrow \boxed{x\neq \pm\sqrt{2}}$$ תחום ההגדרה של הפונקציה

(2ב) האסימפטוטות האנכיות הן $\underline{\underline{x=\pm\sqrt{2}}}$. יחס מקדמי ה - x^2 במונה ובמכנה הוא -1 ולכן האסימפטוטה האופקית היא $\underline{\underline{y=-1}}$

(3ב) נקודת חיתוך ציר y, כאשר $x=0$:

$$(0,-4.5)$$

() נקודת חיתוך ציר x, כאשר $y=0$

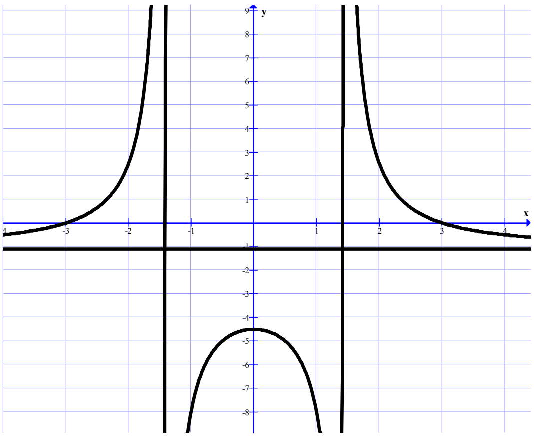
$$0=\frac{9-x^2}{x^2-2}\Rightarrow 9-x^2=0\Rightarrow \boxed{x=\pm 3}\ \Rightarrow (3,0)\ ,\ (-3,0)$$

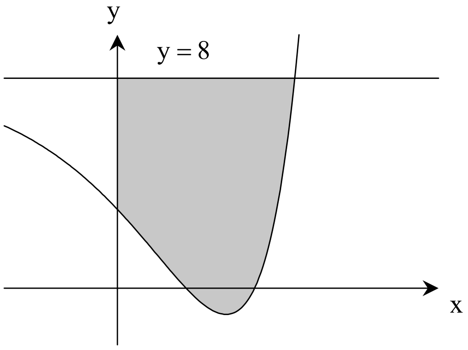
() נמצא נקודת קיצון :

$$f'(x)=\frac{-2x(a-2)}{\left(x^2-2\right)^2}=\frac{-2x(9-2)}{\left(x^2-2\right)^2}=\frac{-14x}{\left(x^2-2\right)^2}$$

קל להוכיח ע״י נגזרת שנייה כי מדובר בנקודת מקסימום, כלומר $(0,-4.5)$ היא נקודת מקסימום.

ב4) תחומי העליה: $x < -\sqrt{2}$ או $-\sqrt{2} < x < 0$. תחומי הירידה: $0 < x < \sqrt{2}$ או $\sqrt{2} < x$.





תשובה
כדי לחשב את שיעורי נקודת החיתוך נפתור:

$$\begin{cases} y=8 \\ \underline{y=e^{2x}-6e^x+8} \end{cases} \Rightarrow \cancel{8}=e^{2x}-6e^x+\cancel{8} \Rightarrow \underline{0=e^{2x}-6e^x}$$

נסמן: $\underline{\underline{e^x=t}}$ ואז:

$$t^2-6t=0 \Rightarrow\Rightarrow \underline{t=0,6}; \quad e^x=\cancel{0} \quad , \quad e^x=6 \Rightarrow \underline{\underline{x=\ell n6}}$$

חישוב השטח:
() לתוך האינטגרל נכניס את הביטוי

$$8-\left(e^{2x}-6e^x+8\right)=\underline{\underline{6e^x-e^{2x}}}$$

וגבולות האינטגרציה הם: הגבול התחתון – 0 והעליון הוא $x=\ell n6$:

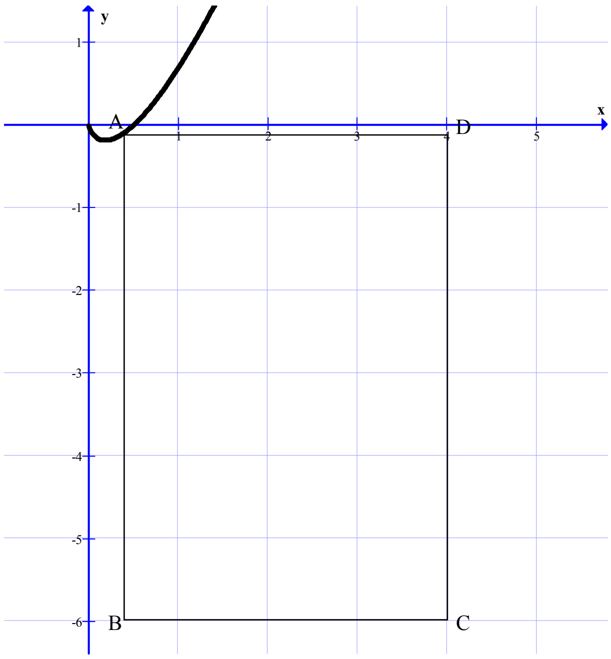
$$S=\int_0^{\ell n6}\left(6e^x-e^{2x}\right)dx=6e^x-\tfrac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^{\ell n6}=6\left[e^{\ell n6}-e^0\right]-\tfrac{1}{2}\left[e^{2\ell n6}-e^0\right]=$$

$$=6\left(6-1\right)-\tfrac{1}{2}\left(e^{\ell n36}-1\right)=30-\tfrac{1}{2}\left(36-1\right)=30-17.5; \qquad \boxed{S=12.5}$$

ניתן גם לחשב כך:

$$\int_0^{\ell n6}8dx-\int_0^{\ell n6}\left(e^{2x}-6e^x+8\right)dx=12.5$$

הערה: אחדים מכם חלקו את השטח לשלושה או אף ארבעה חלקי משנה. למי שעשה כן, יצאו תוצאות גדולות או קטנות במקצת מ – 12.5 וזאת בשל חישובים באמצעות שימוש לא אחיד במספרים אחרי הנקודה העשרונית.



תשובה

הנקודה A בעלת השיעורים $A\left(x\ ,\ x\ell n2x\right)$ ואז:

$AB = x\ell n2x - (-6) = \underline{\underline{x\ell n2x + 6}}$ ו- $\underline{\underline{AD = 4 - x}}$

נסמן ההיקף של ABCD ב – P ואז:

$P = 2AB + 2AD = 2(4-x) + 2(x \cdot \ell n2x + 6) =$

$P(x) = 2x \cdot \ell n2x - 2x + 20$ **פונקצית המטרה**

כדי למצוא נקודות קיצון נגזור את הפונקציה ונשווה הנגזרת לאפס:

$$P'(x) = (2)(\ell n2x) + (\cancel{2x})\left(\frac{2}{\cancel{2x}}\right) - 2 = \underline{\underline{2\ell n2x}}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 2\ell n2x = 0 \Rightarrow 2x = e^0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x = \tfrac{1}{2}}}$$

לקביעת סוג הקיצון נחשב את $P''(x)$ בנקודת קיצון:

$$P''(x) = 2\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}x}\right) = \frac{2}{x} \Rightarrow P''\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4 > 0 \Rightarrow \max.$$ בנקודת קיצון

עבור $x_A = \frac{1}{2}$, היקף המלבן יהיה מינימלי.

כדי לחשב את ההיקף המינימלי נציב את $x = \frac{1}{2}$ בפונקצית המטרה:

סיכום: ההיקף המינימלי הוא $P\left(\tfrac{1}{2}\right) = \cancel{2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \ell n2 \cdot \tfrac{1}{2}} - 2 \cdot \tfrac{1}{2} + 20 = 19$