פתרון שאלה 1

א. (1)

$$\frac{AE}{\sin\alpha}=\frac{10}{\sin 65^\circ}$$
$$AE=\frac{10\sin\alpha}{\sin 65^\circ}$$
$$AE=11.033\sin\alpha$$

מ.ש.ל.

(2)

$$\frac{EB}{\sin(180^\circ-\alpha)}=\frac{10}{\sin 25^\circ}$$
$$\frac{EB}{\sin\alpha}=\frac{10}{\sin 25^\circ}$$
$$EB=\frac{10\sin\alpha}{\sin 25^\circ}$$

ב.

$$S=\frac{EB\cdot AE}{2}=\frac{10\sin\alpha}{\sin 25^\circ}\cdot\frac{10\sin\alpha}{\sin 65^\circ}\cdot\frac{1}{2}$$
$$\frac{EB}{AB}=\sin 65^\circ$$
$$AB=\frac{EB}{\sin 65^\circ}=\frac{10\sin\alpha}{\sin 25^\circ\cdot\sin 65^\circ}$$
$$\frac{AB}{\sin 70^\circ}=\frac{AF}{\sin(110^\circ-\alpha)}$$
$$AF=\frac{AB\sin(110^\circ-\alpha)}{\sin 70^\circ}$$
$$AF=\frac{10\sin\alpha\cdot\sin(110^\circ-\alpha)}{\sin 70^\circ\cdot\sin 25^\circ\cdot\sin 65^\circ}$$
$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{10\sin\alpha\cdot\sin(110^\circ-\alpha)\cdot 10\sin\alpha\cdot\sin 25^\circ}{\cdot\sin 25^\circ\cdot\sin 65^\circ\cdot\sin 70^\circ\cdot\sin 25^\circ\cdot\sin 65^\circ}=\frac{50\sin^3\alpha\cdot\sin(110-\alpha)}{0.1378}=$$
$$=362.84\sin^3\alpha\cdot\sin(110-\alpha)$$

פתרון שאלה 2

$$\sin 2x = 0$$

$2x = 0 + 360°k$ $\qquad$ $2x = 180° - 0° + 360°k$

$x_1 = 180°k$ $\qquad$ $x_2 = 90° + 180°k$

$k = 0$ $\qquad$ $k = 1$

$x = 0$ $\qquad$ $x = 90° = \frac{\pi}{2}$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \left[\frac{-\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{\cos \pi}{2}\right) - \left(-\frac{\cos 0}{2}\right) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$S_1 = 1$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$y' = 2\cos 2x$$

$$2\cos 2x = 0$$

$$\cos 2x = 0$$

$90° \quad \rightarrow \quad 2x = 90° + 260°k$

$x = 45° = \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi}{2} - 1$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin 2x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin 2x)\, dx$$

$$S = \left[x + \frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot 2 = 2 \cdot \left[\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{2}\right) - \left(0 + \frac{\cos 0}{2}\right)\right] = 2\left[\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\right] = 2\left[\frac{\pi}{4} - 1\right] = \frac{\pi}{2} - 1$$

פתרון שאלה 3

$$f(x)=\frac{x-a}{x-2} \qquad a\neq 2$$

א.

תחום הגדרה:

$x-2\neq 0$

$x\neq 2$

ב.

אסימפטוטות מקבילות לצירים:

$x=2$

חזקות מקסימליות במונה ובמכנה שוות.

$y=1$

ג.

חיתוך עם הצירים:

$y=0$

$$0=\frac{x-a}{x-2}$$

$0=x-a$

$a=x$

$(a,0)$

$x=0$

$$f(0)=\frac{0-a}{0-2}=\frac{-a}{-2}$$

$$f(0)=\frac{a}{2}$$

$(0,0.5a)$

ד. (1)

פונקציה יורדת כאשר $y'<0$.

$$f'(x)=\frac{(x-a)'\cdot(x-2)-(x-a)\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x-2-(x-a)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x-2-x+a}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{a-2}{(x-2)^2}$$

$f'(x)<0$

$a-2<0$

$a<2$

(2)

ידוע שהפונקציה יורדת לכל x $(a<2)$

$$f(a)=\frac{a-a}{x-2}=0 \quad \to \quad (a,0)$$

זוהי נקודת ההשקה ונקודת חיתוך (על פי סעיף ג').

$$f'(a)=\frac{a-2}{(a-2)^2}$$

$$f'(a)=\frac{1}{a-2}=m$$

שיפוע המשיק בנקודה $(a,0)$.

בנקודה $x=3$:

$$f(3)=\frac{3-a}{3-2}$$

$$f(3)=3-a$$

נקודת ההשקה: $(3,3-a)$.

$$f'(3)=\frac{a-2}{(3-2)^2}$$

$$f'(3)=a-2=m$$

המשיקים מקבילים ולכן שווים בשיפוע שלהם.

$$a-2=\frac{1}{a-2}$$

$$(a-2)^2=1$$

$$a^2-4a+4-1=0$$

$$a^2-4a+3=0$$

$$a_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot1\cdot3}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm2}{2}\left\langle\begin{array}{l}a_1=3\\a_2=1\end{array}\right.$$

$a_1=3$ נפסל כי $a<2$ לפי התנאי כדי שזו תהיה פונקציה יורדת לכל x לכן $a=1$.

פתרון שאלה 4

א.

$f(x)=2^x$

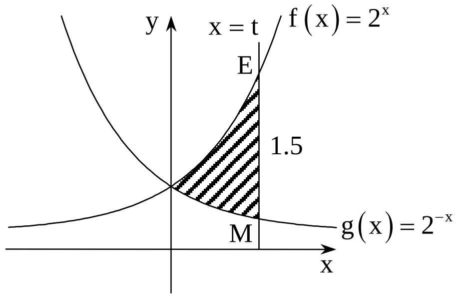
נשים לב שככל ש-x גדל כך $f(x)$ גדל כי 2 בסיס חיובי לכן $f(x)$ מתאים לגרף I.

נשים לב שלפי כללי החזקות אפשר לסדר את $g(x)$ כך:

$g(x)=2^{-x}$

$g(x)=\frac{1}{2^x}$

כאן המונה קבוע ואילו המכנה גדל ככל ש-x גדל ולכן $g(x)$ קטן. המסקנה, $g(x)$ מתאים לגרף II.



ב.

$KM=1.5$

$t=?$

שיעורי הנקודות K ו-M:

$K(t,2^t)$

$M(t,2^{-t})$

$d_{KM}=\sqrt{(t-t)^2+(2^t-2^{-t})^2}$

$1.5=\sqrt{(2^t-2^{-t})^2}$

$1.5=2^t-2^{-t}$

$1.5=2^t-\frac{1}{2^t} \quad /\cdot 2^t$

$1.5\cdot 2^t=(2^t)^2-1$

נסמן: $2^t=A$

$1.5A=A^2-1 \quad /\cdot 2$

$3A=2A^2-2$

$0=2A^2-2A-2$

$A_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 2\cdot(-2)}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm 5}{4}\langle \begin{matrix} A_1=2 \\ A_2=-0.5 \end{matrix}$

נחזור למשתנה המקורי:

$$2^t = 2 \qquad\qquad 2^t = -0.5$$

$$t = 1 \qquad\qquad \varnothing \;\leftarrow\; 2 > 0$$

ג.

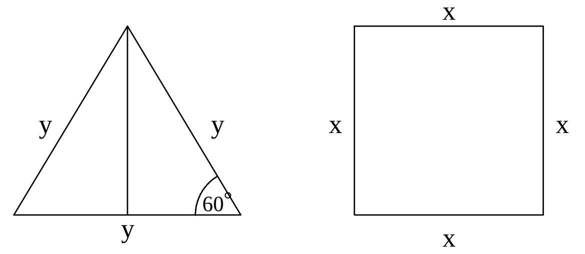
$$S = \int_0^1 \left(2^x - 2^{-x}\right) dx = \left[\frac{2^x}{\ell n2} - \frac{2^{-x}}{-\ell n2}\right]_0^1 = \left[\frac{2^x}{\ell n2} + \frac{1}{2^x \ell n2}\right]$$

$$S = \left(\frac{2^1}{\ell n2} + \frac{1}{2^1 \ell n2}\right) - \left(\frac{2^0}{\ell n2} + \frac{1}{2^0 \ell n2}\right) = \left(\frac{2}{\ell n2} + \frac{1}{2\ell n2}\right) - \left(\frac{1}{\ell n2} + \frac{1}{\ell n2}\right)$$

$$S = \frac{2}{\ell n2} + \frac{1}{2\ell n2} - \frac{2}{\ell n2}$$

$$S = \frac{1}{2\ell n2} = 0.721$$

פתרון שאלה 5



$$P_{\triangle} = 3y \quad ; \quad P_{\square} = 4x$$

$$3y + 4x = 20$$

$$3y = 20 - 4x$$

$$y = \frac{20 - 4x}{3}$$

$$y = 6\frac{2}{3} - 1\frac{1}{3} \cdot y^2$$

$$S_{\triangle} = \frac{\sqrt{3}}{4} y^2 \quad ; \quad S_{\square} = x^2$$

$$S_{\triangle} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{20 - 4x}{3}\right)^2$$

$$S_{\triangle} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{400 - 160x + 16x^2}{9}\right)$$

$$S = \frac{400 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot 9} - \frac{160\sqrt{3}x}{4 \cdot 9} + \frac{16\sqrt{3}x^2}{4 \cdot 9} + x^2$$

$$S = \frac{100\sqrt{3}}{9} - \frac{40\sqrt{3}}{9} x + \frac{4\sqrt{3}}{9} x^2 + x^2$$

$$S' = -\frac{40\sqrt{3}}{9} + \frac{8\sqrt{3}}{9} x + 2x$$

$$0 = -\frac{40\sqrt{3}}{9} + \frac{8\sqrt{3}}{9} x + 2x$$

$$\frac{40\sqrt{3}}{9} = \frac{8\sqrt{3}x + 18x}{9}$$

$$40\sqrt{3} = x\left(8\sqrt{3} + 18\right)$$

$$\frac{40\sqrt{3}}{8\sqrt{3} + 18} = x = 2.1748$$

סיווג נקודת קיצון: בדיקת נגזרת שניה

$$S' = -\frac{40\sqrt{3}}{9} + \frac{8\sqrt{3}}{9} x + 2x$$

$$S'' = \frac{8\sqrt{3}}{9} + 2 > 0 \ \text{min}$$