מבחן קיץ 2009

תרגיל 1 :

נתונה פרבולה שמשוואתה $y=(m-1)x^2-(2m-2)x+9-m$.

א. עבור אילו ערכים של m הפרבולה אינה עוברת מתחת לציר ה- x?

ב. עבור אילו ערכים של m קדקוד הפרבולה נמצא מעל לישר y=4 , כאשר לפרבולה יש מקסימום?

הערה : פתרון סעיף ב' אינו תלוי בפתרון של סעיף א.

פתרון :

$$y=(m-1)x^2-(2m-2)x+9-m$$

א.

$$a>0$$

$$a=m-1>0$$

$$m>1$$

בדיקה עבור $\Delta \le 0$

$$\Delta=\left[-(2m-2)\right]^2-4(4-m)(9-m)=$$

$$=4m^2-8m+4-4(9m-m^2-9+m)=$$

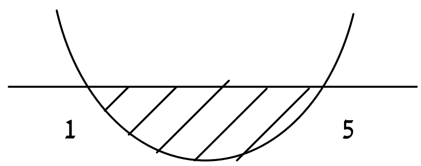
$$=4m^2-8m+4-36m+4m^2+36-4m=$$

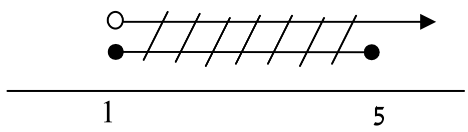
$$8m^2-48m+40\le 0 \setminus \cdot 8$$

$$m^2-6m+5\le 0$$

$$(m-1)(m-5)=0$$

$$m=1 \qquad m=5$$

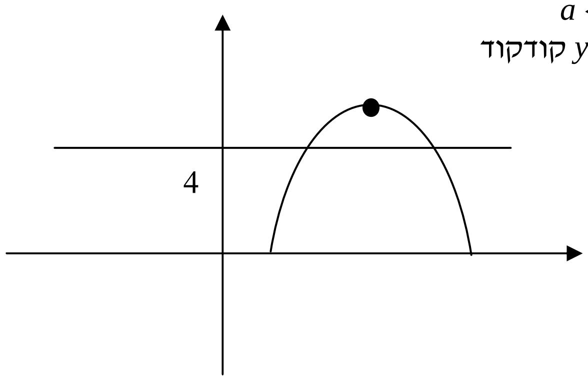




פתרון סופי $1<\mathrm{m}\le 5$

ב. תנאי ראשון : $a < 0$

תנאי שני : קודקוד $y > 4$



1. $a = m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1$

2.

$$y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{8m^2 - 48m + 40}{4(m-1)} = -\frac{8(m-1)(m-5)}{4(m-1)} = -2(m-5) > 4$$

$$-2m + 10 > 4 \Rightarrow 6 > 2m \Rightarrow m < 3$$

$$m < 1$$

תשובה : $m < 1$

תרגיל 2 :

2. סך התשלום עבור טלוויזיה מחולק ל-12 תשלומים חודשיים.
התשלומים החודשיים מהווים סדרה חשבונית.
סך התשלום עבור הטלוויזיה גדול פי 1.52 מסך 6 התשלומים הראשונים,
והוא גדול ב- 1900 שקל מהסכום של שני התשלומים האמצעיים.
מצא את :

א. ההפרש של הסדרה החשבונית.

ב. סך התשלום עבור הטלוויזיה.

פתרון :

נתונים : $n = 12$

$$S_{12} = 1.52 \cdot S_5$$

$$S_{12} = 1900 + a_6 + a_7$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}\left(2a_1 + 11d\right) = 12a_1 + 66d$$

$$S_6 = \frac{6}{2}\left(2a_1 + 5d\right) = 6a_1 + 15d$$

$$a_6 = a_1 + 5d$$

$$a_7 = a_1 + 6d$$

ע״פ נתון ראשון :

$$1.52(6a_1 + 15d) = 12a_1 + 66d$$

$$9.21a_1 + 22.8d = 12a_1 + 66d \; / - 66d - 9.12a_1$$

$$-43.2d = 2.88a_1$$

$$\frac{-43.2d}{2.88} = a_1$$

$$-15d = a_1$$

ע״פ נתון שני :

$$1900 + a_1 + 5d + a_1 + 6d = 12a_1 + 66d$$

$$1900 + 2a_1 + 11d = 12a_1 + 66d \; / : 2a_1 - 66d$$

$$10a_1 = 1900 - 55d \; / : 10$$

$$a_1 = 190 - 5.5d$$

נשווה :

$$-15d = 190 - 5.5d \; / + 5.5d$$

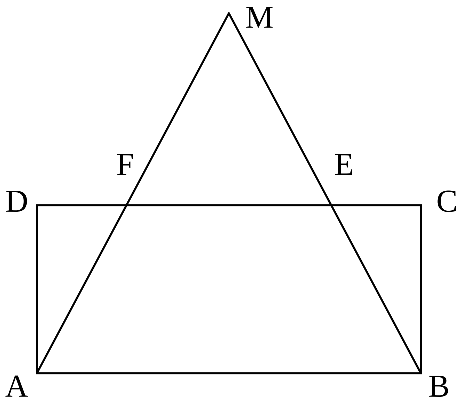
$$-9.5d = 190 \; / : -9.5$$

$$d = -20$$

$$a_1 == 15 \cdot \left(-20\right) = 300$$

$$S_{12} = 12 \cdot 300 + 66 \cdot \left(-20\right) = 3600 - 1320$$

$$\boxed{S_{12} = 2280}$$



תרגיל 3 :

על הצלע AB של המלבן ABCD

בנו משלוש שווה שוקיים AMB (AM=BM).

MA ו- MB חותכים את DC

בנקודות F ו- E בתאמה (ראה ציור).

EF הוא קטע אמצעים במשולש AMB.

א. הוכח כי DF=EC.

ב. הוכח כי היחס בין שטח המשולש ADE

לשטח הטרפז ABCE הוא 3:5.

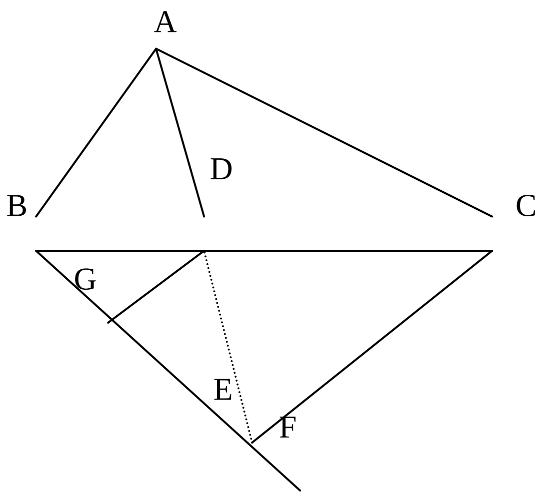
פתרון :

א.

טענה	נימוק
AD=BC	צלעות נגדיות במלבן שוות (צלע)
$\sphericalangle D=\sphericalangle C=\sphericalangle DAB=\sphericalangle CBA=90$	כל זוויות המלבן ישרות (זווית)
$\sphericalangle MAB=\sphericalangle MBA=\alpha$	זוויות בסיס במש״ש שוות
$\sphericalangle DAF=\sphericalangle CBE=90-\alpha$	סכום זווית (זווית)
$\Delta DAF \cong \Delta CBE$	לפי משפט חפיפה ז,צ,ז
CE=DF	משל צלעות מתאימות במשולשים חופפים שווים

ב.

טענה	נימוק
AB=DC	צלעות נגדיות במלבן שוות
$AB=DC=4x$	נגדיר
$EF=\frac{1}{2}AB=2x$	קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע ושווה למחציתה
$FD=CE=\frac{DC-FE}{2}=\frac{4x-2x}{2}=x$	לפי סעיף א'
$DE=3x=DF+FE=x+2x$	חשבון קטעים
$S_{\Delta ADE}=\frac{3x\cdot h}{2}=1.5xh$	שטח משלוש
$S_{ABCD}=4x\cdot h$	שטח מלבן
$S_{ABCE}=4xh-1.5xh=2.5xh$	חיסור בין השטחים
$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{ABCE}}=\frac{1.5xh}{2.5xh}=\frac{3}{5}$	משל היחס בין השטחים.



תרגיל 4 :

על הצלע BC במשולש ABC בנו משולש EBC.

AD הוא חוצה זווית BAC.

GD מקביל לצלע EC (ראה ציור).

נתון : AB= 3

AC=5

BE=4

א. חשב את אורך הקטע GE.

נמק את תשובתך.

ב. F היא נקודה על המשך הצלע BE.

נתון כי EC הוא חוצה זווית DEF (ראה ציור).

הוכח כי משולש GED הוא שווה שוקיים.

פתרון :

נתונים : AD חוצה זווית

$GD \| EC$

נימוק	טענה
לפי משפט חוצה זווית	$\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC}$
נציב ע"פ נתונים	$\frac{3}{5} = \frac{BD}{DC}$
לפי משפט תלס	$\frac{BD}{DC} = \frac{BG}{GE}$
נציב	$\frac{BG}{GE} = \frac{3}{5} \Rightarrow BG = \frac{3GE}{5}$
לפי הנתון BE=4	$BG + GE = 4$
	$\frac{3GE}{5} + GE = 4$
	$\frac{3GE + 5GE}{5} = 4 / \cdot 5$
	$8GE = 20$
משל	$GE = 2\frac{1}{2}$ ס"מ

ב.

נתון : EC חוצה זווית $\sphericalangle DEF$

$\sphericalangle DEC = \sphericalangle CEF$

טענה	נימוק
$\sphericalangle CED = \sphericalangle GDE = \beta$	זוויות מתחלפות בין מקבילים
$\sphericalangle GED = 180 - 2\beta$	זויות צמודות משלימות ל- 180
$\Delta DGE \rightarrow \sphericalangle DGE = \beta$	סכום זויות במשולש 180
ΔDGE משולש שווה שוקים	משולש שווה שוקיים משלוש ובו שתי זויות שוות הוא שווה שוקים.

תרגיל 5 :

מועמדים לעבודה בחברת השקעות נדרשים להיבחן אצל גרפולוג להערכת אמינותם.
ידוע כי 80% מהמועמדים הם אנשים אמינים.
אם המועמד אכן אמין, הסיכוי שגרפולוג יקבע שהוא אמין הוא 0.7.
אם המועמד אינו אמין, הסיכוי שגרפולוג יקבע שהוא אמין הוא 0.2.

א. מהי ההסתברות שגרפולוג יקבע שהמועמד אמין?

ב. מהי ההסתברות שמועמד הוא אכן אמין, אם גרפולוג קבע שהוא אמין?

ג. כדי שמועמד יתקבל לעבודה, הוא צריך להיבחן אצל 3 גרפולוגים בלתי תלויים, ולפחות 2 מהם צריכים לקבוע שהמועמד אמין.
הכושר של כל גרפולוג לקבוע אמינות הוא כמו שנתון בתחילת השאלה.
מהי ההסתברות שמועמד יתקבל לעבודה?

ד. החברה שינתה את מדיניותה לקבלת מועמדים.
היא החליטה כי 3 גרפולוגים בלתי תלויים צריכים לקבוע שהמועמד אמין.
לאחר שינוי המדיניות, מהי ההסתברות שמועמד יתקבל לעבודה אם הוא אדם לא אמין?
(הכושר של כל גרפולוג לקבוע אמינות לא השתנה).
הערה : פתרון סעיף ד' אינו תלוי בפתרון הסעיפים הקודמים.

פתרון :

א.

$$P_1 = 0.8 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.2 = 0.6$$

$$P_1 = 0.6$$

ב.

$$P_2 = \frac{0.8 \cdot 0.7}{0.8 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.2} = \frac{0.56}{0.6} = \frac{14}{15}$$

$$P_2 = \frac{14}{15}$$

ג. $n = 3$, $k = 2.3$, $p = 0.6$

$$P_3 = P_3(2) + P_3(3)$$

$$P_3(2) = \binom{3}{2} 0.6^2 \cdot 0.4^1 = 0.432$$

$$P_3(3) = \binom{3}{3} = 0.6^3 \cdot 0.4^0 = 0.216$$

$$P_3 = 0.648$$

ד. $P = 0.2$, $n = 3$, $k = 3$

$$P_4 = P_3(3) = \binom{3}{3} 0.2^3 \cdot 0.8^0 = 0.008$$

$$P_4 = 0.008$$

תרגיל 6:

בעיר מסוימת נערך סקר שבדק אם יש קשר בין קריאת ספרים ובין הרכבת משקפיים.

ממצאי הסקר היו:

- 24% מהתושבים מרכיבים משקפיים וגם קוראים ספרים.
- 86% מהתושבים מרכיבים משקפיים או קוראים ספרים (כולל מרכיבים משקפיים וגם קוראים ספרים)
- אין קשר סטטיסטי בין קריאת ספרים ובין הרכבת משקפיים.

א. מצא את אחוז התושבים שקוראים ספרים ואת אחוז התושבים שמרכיבים משקפיים, אם נתון כי מספר התושבים שמרכיבים משקפים גדול ממספר התושבים שקוראים ספרים.

ב. כעבור שנתיים נמצא כי אחוז התושבים שמרכיבים משקפיים וגם קוראים ספרים עלה ועכשיו הוא 27%, ואילו אחוז התושבים שמרכיבים משקפים לא השתנה וגם אחוז התושבים שקוראים ספרים לא התשנה.

האם עכשיו יש בסיס להנחה שקריאת ספרים עשויה להיות אחת הסיבות להרכבת משקפיים? נמק.

פתרון:

נסמן: A- קורא ספרים

B- מרכיב משקפיים.

נתונים:

$$P(A\cap B)=0.24$$
$$P(A\cup B)=0.86$$
$$P(B/A)=P(B)$$
$$P(B)>P(A)$$

נסמן:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)}{x}=\frac{0.24}{x}=P(B)$$
$$P(A\cup B)=1-P(\vec{A}\cap\vec{B})$$
$$0.86=1-P(\vec{A}\cap\vec{B})$$
$$P(\vec{A}\cap\vec{B})=1-0.86=0.24$$

	$\vec{A}$	A	
$\frac{0.24}{x}$		0.24	B
x-0.1	0.14	x-0.24	$\vec{B}$
1		x	

$$\frac{0.24}{x} - x - 0.1 = 1$$
$$x - 1.1 + \frac{0.24}{x} = 0 / x$$
$$x^2 - 1.1x + 0.24 = 0$$
$$P(A) = x = 0.3$$
$$P(A) = x = 0.8$$

אם $P(A) = 0.3$ אז: $P(B) = \frac{0.24}{0.3} = 0.8$

אם $P(A) = 0.8$ אז: $P(B) = \frac{0.24}{0.8} = 0.3$

נתון $P(B) > P(A)$ ולכן: $P(A) = 0.3$, $P(A) = 0.8$

ב. הנתונים כעת:

$$P(A \cap B) = 0.27$$
$$P(A) = 0.3$$
$$P(B) = 0.8$$
$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.27}{0.3} = 90\%$$
$$P(B / \vec{A}) = \frac{P(\vec{A} \cap B)}{P(\vec{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0.8 - 0.27}{0.7} = 75.71\%$$

כעת יש קשר סטטיסטי: מבין קוראים 90% מרכיבים משקפים לעומת רק 75.71% שמרכיבים משקפים מבין אלה שאינן קוראים.

מכיוון שכעת יש קשר סטטיסטי יתכן וקיים קשר סיבתי.