<u>פתרונות למבחן בגרות קיץ 2008 שאלון 006</u>

<u>פתרון שאלה מספר 2:</u>

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}>4^n\frac{1\cdot 2\cdots n}{n+1}$$

נבדוק עבור $n=2$:   צד ימין: $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2}=12$,   צד שמאל: $4^2\frac{1\cdot 2}{1+2}=10\frac{2}{3}$

$$12>10\frac{2}{3}$$

נניח כי הטענה נכונה עבור $n=k$ (k מספר טבעי כלשהוא גדול מ-1):

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots 2k}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots k}>4^n\frac{1\cdot 2\cdots k}{k+1}$$

נוכיח כי הטענה נכונה עבור $n=k+1$:

$$\overbrace{\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots 2k}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots k}}\cdot\frac{(2k+1)\cdot\overbrace{\cancel{(2k+2)}}^{2}}{\cancel{k+1}}>4^{k+1}\frac{1\cdot 2\cdots k\cdot(k+1)}{k+2}$$

$$4^k\cdot\frac{1\cdot 2\cdots\cdots k}{k+1}\cdot(2k+1)\cdot 2>4^{k+1}\frac{1\cdot 2\cdots k(k+1)}{k+2}$$

$$\frac{2\cdot(2k+1)}{k+1}>\frac{4\cdot(k+1)}{k+2}$$

$$\frac{4k+2}{k+1}^{\,k+2/}-\frac{4k+4}{k+2}^{\,k+1/}>0$$

$$\frac{(k+2)\cdot(4k+2)-(4k+2)\cdot(k+1)}{(k+1)\cdot(k+2)}>0$$

$$\frac{\cancel{4k^2}+2k+\cancel{8k}+\cancel{4}-\cancel{4k^2}-\cancel{4k}-\cancel{4k}-\cancel{4}}{(k+1)(k+2)}>0$$

$$\frac{2k}{(k+1)\cdot(k+2)}>0$$

על סמך אקסיומת האינדוקציה הטענה נכונה לכל המספרים הטבעיים עבורם $n>1$.

ב.   נציב את $n=9$ באי שוויון שהוכחנו בסעיף א׳:

$$\frac{\overbrace{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdots 18}}^{10\cdot 11\cdot 12\cdots 18}}{1\cdot 2\cdots 9} > 4^9\,\frac{\cancel{1\cdot 2\cdots 9}}{10}$$

$$\frac{10\cdot 11\cdots 18}{1\cdot 2\cdots 9} > \frac{4^9}{10}$$

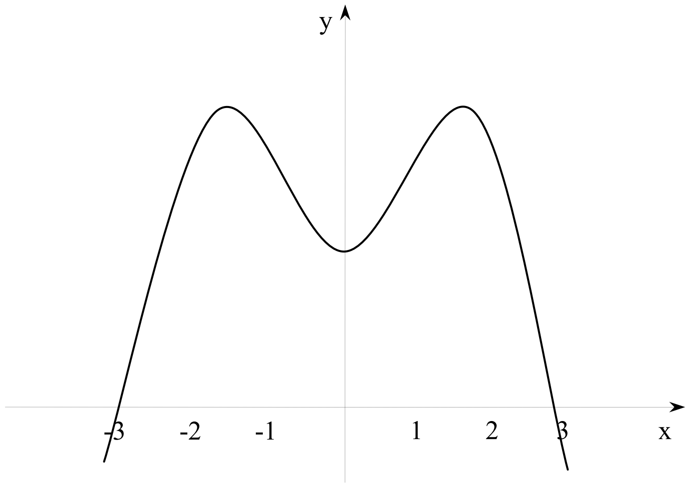
נעשה כפל בהצלבה ונקבל:

$$\frac{10^2\cdot 11\cdots 18}{1\cdot 2\cdots 9} > 4^9$$

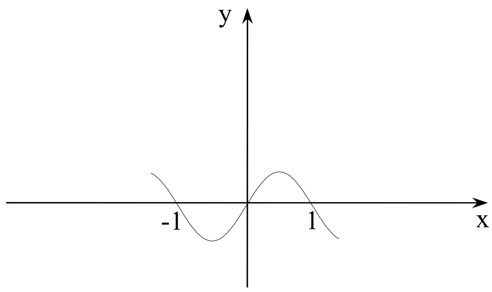
מ.ש.ל

פתרון שאלה 3 :

גרף של פונקצית הנגזרת $f'(x)$:



נקודת הקיצון של הפונקציה $f'(x)$ הן נקודות החיתוך של $f''(x)$ עם ציר ה-x . כלומר בנקודות
$x=-1 \,,\, x=0 \,,\, x=1$



הסבר לשרטוט :

עבור $x<-1$ $f'(x)$ עולה ועל כן $f''(x)>0$.

עבור $-1<x<0$ $f'(x)$ יורדת ועל כן $f''(x)<0$.

עבור $0<x<1$ $f'(x)$ עולה ועל כן $f''(x)>0$.

עבור $x>1$ $f'(x)$ יורדת ועל כן $f''(x)<0$.

ב. נתון כי $f(-3)=0$ בתחום $-4\le x\le 4$, כדי למצוא נקודות קיצון יש לחשב מתי $f'(x)=0$
לפי השרטוט הנגזרת שווה ל-0 עבור $x=-3$ $x=3$. כדי לקבוע את סוג נקודת הקיצון

נעשה טבלה:

x	-4	$-3\frac{1}{2}$	-3	0	3	$3\frac{1}{2}$	4
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
		↘	min	↗	max	↘	

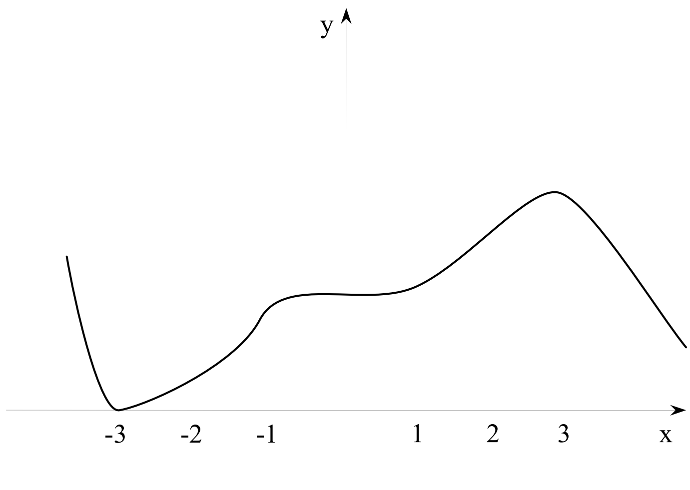
הנקודות $x=-4$ $x=3$ הן נקודות מקסימום, והנקודות $x=4$ $x=-3$ הן נקודות מינימום.

ג. כדי למצוא נקודות פיתול יש לחשב מתי $f''(x)>0$ לפי שרטוט הנגזרת השנייה שווה ל-0
כאשר $x=-1$ $x=0$ $x=1$ כדי לקבוע תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה נעשה טבלה:

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f''(x)$		+	0	-	0	-	0	+	
		↗	max	↘	min	↗	max	↘	

קעירות כלפי מעלה: $-4<x<-1\ ,\ 0<x<1$

קעירות כלפי מטה: $-1<x<0\ ,\ 1<x<4$



__פתרון שאלה 4:__

$$f(x)=\frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$$

1. תחום הגדרה: $x \geq 0$.
2. אסימפטוטה אופקית $y=0$ אין אסימפטוטה אנכית.
3.

$$f'(x)=\frac{\frac{4\cdot 1}{2\sqrt{x}}(x^2+3)-4\sqrt{x}\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$$

$$\frac{\frac{4}{2\sqrt{x}}(x^2+3)-8x\sqrt{x}}{(x^2+3)^2}=0$$

$$\frac{2}{\sqrt{x}}(x^2+3)-8x\sqrt{x}=0$$

$$2x^2+6-8x^2=0$$

$$-6x^2+6=0$$

$$6x^2=6 \quad /:6$$

$$x^2=1$$

$$\boxed{x=1} \quad \boxed{x=-1}$$

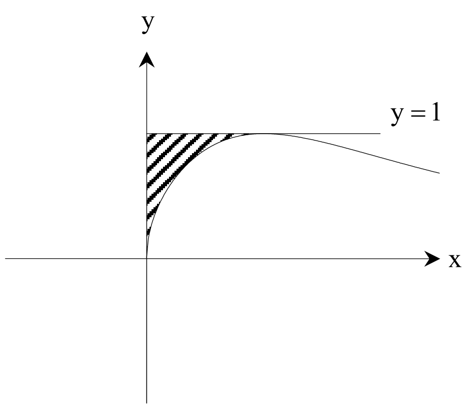
x	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f'(x)$		+	0	-
	min	↗	max	↘

$\max(1,1) \quad \min(0,0)$

כדי לשרטט את סקיצה נבדוק נקודות חיתוך עם הצירים:

$x=0 \quad f(0) \quad (0,0)$

$y=0 \quad x=0$



האינטגרל למציאת נפח גוף סיבוב:

$$\pi\int_0^1 1dx \quad +\pi\int_1^0\left(\frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}\right)^2 dx$$

$$\pi x\Big|_0^1 \quad +\pi\int_1^0 \frac{16x}{\left(x^2+3\right)^2}dx$$

נעזר באינטגרל בהצבה:

נסמן: $x^2+3=t$

$2xdx=dt$

$$dx=\frac{dt}{2x}$$

$$\int\frac{\cancel{16}\,\cancel{x}}{t^2}\frac{dt}{\cancel{2}\,\cancel{x}}=\int 8t^{-2}dt=\frac{8t^{-1}}{-1}=\frac{-8}{t}=\frac{-8}{x^2+3}$$

ונקבל:

$$\pi(1-0)+\pi\int_1^0\frac{\overset{8}{\cancel{16}}\,\cancel{x}}{t^2}\frac{dt}{2x}=$$

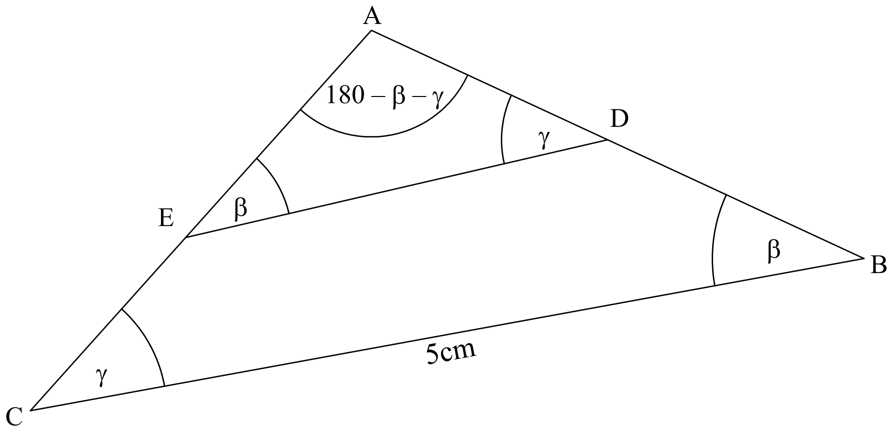
$$\pi(1-0)+\pi\frac{-8}{x^2+3}\Big|_1^0=$$

$$\pi+\pi\left[\frac{-8}{0^2+3}-\frac{-8}{1^2+3}\right]=$$

$$\pi+\pi\left[\frac{-8}{3}+\frac{8}{4}\right]=\pi+\pi\left[\frac{-2}{3}\right]=\frac{\pi}{3}$$

תשובה: $\frac{\pi}{3}$

פתרון שאלה 5 :



$S_{BCED} = 4_{cm^2}$

$S_{BCED} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AED}$

$\sphericalangle A = 180 - \beta - \gamma$ -סכום הזוויות במשולש AED שווה ל- 180°.

שטח של משולש לפי צלע ושלוש זוויות :

$$S_{\triangle AED} = \frac{DE^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2\sin(180-\beta-\gamma)} = \frac{DE^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$$

$$S_{ABC} = \frac{25\sin\beta \cdot \sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)} - \frac{DE^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)} = 4$$

$$25\sin\beta \cdot \sin\gamma - DE^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = 8\sin(\beta+\gamma)$$

$$DE^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = 25\sin\beta \cdot \sin\gamma - 8\sin(\beta+\gamma)$$

$$DE^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = 25\sin\beta \cdot \sin\gamma - 8(\sin\beta \cdot \cos\gamma + \cos\beta \cdot \sin\gamma)$$

$$DE^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = 25\sin\beta \cdot \sin\gamma - 8\sin\beta \cdot \cos\gamma - 8\cos\beta \cdot \sin\gamma \quad /:\sin\beta \cdot \sin\gamma$$

$$DE^2 = 25 - 8 \cdot \cot\gamma - 8 \cdot \cot\beta$$

$$DE^2 = 25 - 8\left(\frac{1}{\tan\gamma} + \frac{1}{\tan\beta}\right)$$

$$DE = \sqrt{25 - 8\left(\frac{1}{\tan\gamma} + \frac{1}{\tan\beta}\right)}$$