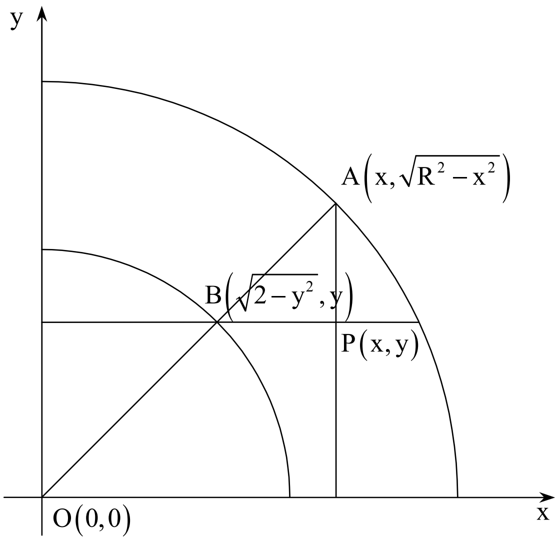
פתרונות למבחן בגרות קיץ 2008 שאלון 006

.1

א.



$$A\left(x,\sqrt{R^2-x^2}\right)\quad ;\quad B\left(\sqrt{2-y^2},y\right)$$

$$m_{AO}=m_{BO}$$

$$m_{AO}=\frac{\sqrt{R^2-x^2}-0}{x-0}=\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{x}$$

$$m_{BO}=\frac{y-0}{\sqrt{2-y^2}-0}=\frac{y}{\sqrt{2-y^2}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{x}\right)^2=\left(\frac{y}{\sqrt{2-y^2}}\right)^2$$

$$\frac{R^2+x^2}{x^2}=\frac{y^2}{2-y^2}$$

$$x^2y^2=2R^2-2x^2-y^2R^2+y^2x^2$$

$$2x^2+R^2y^2=2R^2\quad /:2R^2$$

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{2}=1$$

<u>תשובה</u>: $\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{2}=1$

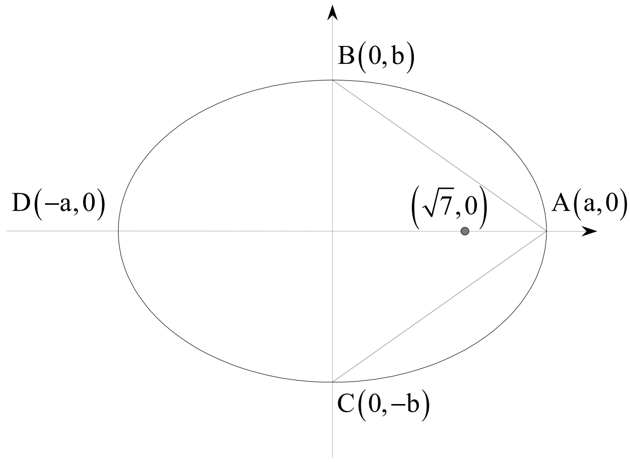
ב.

הצורה שיצאה היא אליפסה.

.2

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$a^2=c^2-b^2$$



.א

$$m_{AB}=\frac{b-0}{0-a}=\frac{-b}{a}$$

$$m_{AC}=\frac{0+b}{a-0}=\frac{b}{a}$$

$$\tan\sphericalangle BAC=\frac{m_{AC}-m_{AB}}{1+m_{AC}\cdot m_{AB}}$$

$$\frac{24}{7}=\frac{\frac{b}{a}+\frac{b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

$$\frac{24}{7}=\frac{\frac{2b}{a}}{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$

$$\frac{24a^2-24b^2}{a}=14b$$

$$24a^2-24b^2=14ab \quad /:2$$

$$12a^2-12b^2=7ab$$

$$c^2=a^2-b^2$$

$$c^2=7 \quad \to \quad a^2-b^2=7$$

$$12\left(a^2-b^2\right)=7ab$$

$$12\cdot 7=7\cdot ab$$

$$ab=12$$

$$\boxed{a=\frac{12}{b}}$$

$$\frac{144}{b^2}-b^2=7$$

$$144-b^4=7b^2$$

$$b^4+7b^2-144=0 \quad ; \quad b^2=t$$

$$t^2+7t-144=0$$

$$t_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-7\pm 25}{2}\left\langle\begin{array}{l} t_1=9 \Rightarrow b^2=9 \Rightarrow b=\pm 3 \\ t_2=-16 \Rightarrow b^2=-16 \ \varnothing\end{array}\right.$$

$$7=a^2-9$$

$$a^2=16$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

<u>תשובה</u>: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

ב. נסמן: $P(x,y)$, $F_1(\sqrt{7},0)$, $F_2(-\sqrt{7},0)$

$$m_{PF_1}=\frac{y-0}{x-\sqrt{7}}=\frac{y}{x-\sqrt{7}}$$
$$m_{PF_2}=\frac{y-0}{x+\sqrt{7}}=\frac{y}{x+\sqrt{7}}$$

אם $\sphericalangle F_1PF_2=90$ אז מתקיים: $m_{PF_1}\cdot m_{PF_2}=-1$

$$\frac{y}{x-\sqrt{7}}=\frac{-x-\sqrt{7}}{y}$$
$$y^2=\left(x-\sqrt{7}\right)\left(-x-\sqrt{7}\right)$$
$$y^2=-x^2-\sqrt{7}x+\sqrt{7}x+7$$
$$y^2=-x^2+7$$

נציב במשוואת האליפסה:

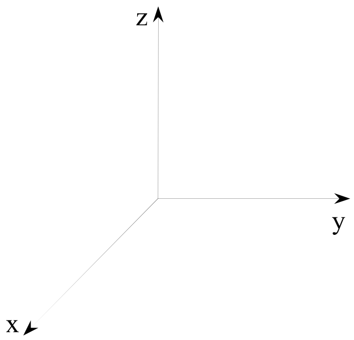
$$\frac{x^2}{16}+\frac{-x^2+7}{9}=1$$
$$9x^2-16x^2+112=144$$
$$-7x^2=32$$
$$x^2=\frac{32}{-7}\ \varnothing$$

אין פתרון ולכן מתקיים: $\sphericalangle F_1PF_2\neq 90$

תשובה: הוכחה.

.3

א.



$C(0,4,0)$, $A(3,0,0)$, $B'(3,4,m)$

$ACB':(3,0,0)+t(-3,4,0)+S(0,4,m)$

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & m \end{vmatrix} = \begin{matrix} A=4m \\ B=-(-3m)=3m \\ C=-12 \end{matrix}$$

$4mx+3my-12z+d=0$

נציב את קודקוד A כדי למצוא את d :

$12m+d=0 \quad \Rightarrow \quad d=-12$

ולכן: $4mx+3my-12z-12m=0$

תשובה: $4mx+3my-12z-12m=0$

ב.

$$V_{D'ACB'}=\frac{S_{ACB'}\cdot h_1}{3}=\frac{S_{ACB'}\cdot\frac{24m}{\sqrt{25m^2+144}}}{3} \qquad ; \qquad D'(0,0,m)$$

מרחק נקודה D' מהמישור ACB'

$$h_1=\left|\frac{4m\cdot0+3m\cdot0-12m}{\sqrt{16m^2+9m^2+144}}\right|=\left|\frac{-24\cdot m}{\sqrt{25m^2+144}}\right|=\frac{24m}{\sqrt{25m^2+144}}=$$

$$V_{BACB'}=\frac{S_{ACB'}\cdot h_2}{3}=\frac{S_{ACB'}\cdot\frac{12m}{\sqrt{25m^2+144}}}{3} \qquad ; \qquad B(3,4,0)$$

מרחק נקודה B מהמישור ACB'

$$h_2=\left|\frac{4m\cdot3+3m\cdot4-12\cdot0-12m}{\sqrt{16m^2+9m^2+144}}\right|=\frac{12m}{\sqrt{25m^2+144}}$$

$$\frac{V_{D'ACB'}}{V_{BACB'}}=\frac{\frac{24m}{\sqrt{25m^2+144}}}{\frac{12m}{\sqrt{25m^2+144}}}=2$$

תשובה: פי 2

ג.

זווית בין ישר למישור: $B(3,4,0)$, $B'(3,4,m)$

המישור: $\pi:4mx+3my-12z-12m=0$, **הישר**: $\ell:(3,4,0)+t(0,0,m)$

$$\sin=\frac{|(0,0,m)(4m,3m,-12)|}{\sqrt{0^2+0^2+m^2}\cdot\sqrt{16m^2+9m^2+144}} \quad \Rightarrow \quad \sin30=\frac{+12m}{m\sqrt{25m^2+144}}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{12}{\sqrt{25m^2+144}} \quad \Rightarrow \quad 24=\sqrt{25m^2+144} \quad \Rightarrow \quad 576=25m^2+144$$

$$25m^2=432 \quad \Rightarrow \quad m^2=17.28 \quad \to \quad m=\pm4.16$$

תשובה: $m=4.16$

.4

$$\left|2+3^{x^2-x-1}-12i\right|>13$$

א.

$$\sqrt{\left(2+3^{x^2-x-1}\right)^2+144}>13$$

$$4+4\cdot3^{x^2-x-1}+3^{2(x^2-x-1)}+144>169$$

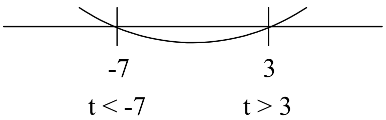
$$3^{2\left(x^2-x-1\right)}+4\cdot3^{x^2-x-1}-21>0$$

נסמן: $3^{x^2-x-1}=t$

$$t^2+4t-21>0$$

$$t^2+4t-21=0$$

$$t_{1,2}=\frac{-4\pm10}{2}\left\langle\begin{array}{l}t_1=-7\\t_2=3\end{array}\right.$$



$$t=-7$$

$$3^{x^2-x-1}=-7\quad\varnothing$$

$$t=3$$

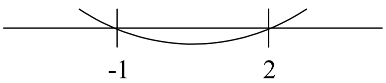
$$3^{x^2-x-1}>3$$

$$x^2-x-1>1$$

$$x^2-x-2>0$$

$$x^2-x-2=0$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm3}{2}\left\langle\begin{array}{l}x_1=2\\x_2=-1\end{array}\right.$$



<u>תשובה</u>: $x>2$ או $x<-1$

ב.

$$t=z+\bar{z}$$

$$z=\cos\alpha-i\sin\alpha$$

$$\bar{z}=\cos\alpha-i\sin\alpha$$

$$t=\cos\alpha+i\sin\alpha+\cos\alpha-i\sin\alpha$$

$$t=2\cos\alpha$$

מאחר ו - $-2\le t\le2 \Leftarrow -2\le2\cos\alpha\le2 \Leftarrow -1\le\cos\alpha\le1$

<u>תשובה</u>: $-2\le t\le2$

.5

$$f(x)=\frac{e^{2x}+4e^x+3}{\left(e^x-3\right)^2}$$

.א

תחום הגדרה:

$$\left(e^x-3\right)^2\neq 0$$
$$e^x\neq 3$$
$$\ell ne^x\neq \ell n3$$
$$x\neq \ell n3$$

<u>תשובה</u>: $x\neq \ell n3$

.ב

$y=\frac{1}{3}\left(x\to -\infty\right)$, $y=1\left(x\to +\infty\right)$, $x=\ell n3$

.ג

נקודת חיתוך עם ציר ה-x: $y=0$

$$0=e^{2x}+4e^x+3$$

נסמן: $e^x=t$

$$t^2+4t+3=0\quad\Rightarrow\quad t_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{-4\pm 2}{2}\left\langle\begin{array}{l}t_1=-3\\ t_2=-1\end{array}\right.$$

אין פתרון. ולכן אין נקודות חיתוך עם ציר ה-x.

נקודות חיתוך עם ציר ה-y: $x=0$.

$$y=\frac{e^{2\cdot 0}+4e^0+3}{\left(e^0-3\right)^2}=2$$

<u>תשובה</u>: $\left(0,2\right)$

.ד

$$f(x)=\frac{\left(2e^{2x}+4e^x\right)\left(e^x-3\right)^2-\left(e^{2x}+4e^x+3\right)\left(2\left(e^x-3\right)\cdot e^x\right)}{\left(e^x-3\right)^2}=0$$

$$\left(e^x-3\right)\left[\left(2e^{2x}+4e^x\right)\left(e^x-3\right)-2e^x\left(e^{2x}+4e^x+3\right)\right]=0$$

$$\downarrow\qquad\qquad\downarrow$$

$$e^x=3\qquad\qquad 2e^{3x}-6e^{2x}+4e^{2x}-12e^x-2e^{3x}-8e^{2x}-6e^x=0$$

$$x=\ell n3\ \varnothing\qquad\qquad -10e^{2x}-18e^x=0\quad /:(-2)$$

$$5e^{2x}+9e^x=0$$

$$e^x\left(5e^x+9\right)=0$$

$$\swarrow\qquad\searrow$$

$$e^x=0\ \varnothing\qquad\qquad 5e^x=-9$$

$$e^x=-\frac{9}{5}\ \varnothing$$

x	0	$\ell n3$	$\ell n4$
y'	+		−
y	↗		↘

תשובה: תחום עלייה: $x < \ell n3$.

תחום ירידה: $\ell n3 < x$.

ה.