בגרות 2009 007

תרגיל 1:

א. שניים מקדקודי משולש ABC הם $B(0,-2)$, $C(0,6)$

חוצה זווית A חותך את הצלע BC בנקודה (0,0).

(קודקוד A אינו נמצא על ציר ה- y)

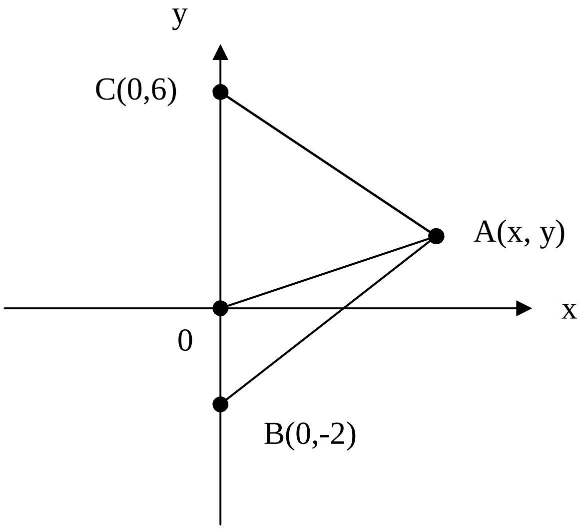
מצא את משוואת המקום הגאומטרי של הנקודות האפשריות עבור קדקוד A.

ב. האם אפשר לחסום מלבן שהיקפו 12 , במקום הגאומטרי שאת משוואתו מצאת בסעיף א? נמק

(שים לב: קדקודי המלבן מונחים על המקום הגאומטרי).

פתרון:

א.



נשתמש במשפט חוצה זווית שמקיים:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{CO}{OB}$$

$$AC=\sqrt{(x-0)^2+(y-6)^2}=\sqrt{x^2+y^2-12y+36}$$

$$AB=\sqrt{(x-0)^2+(y+2)^2}=\sqrt{x^2+y^2+4x-4}$$

$$OC=6$$

$$OB=2$$

$$\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2-12y+36}}{\sqrt{x^2+y^2+4x-4}}\right)^2=\left(\frac{6}{2}\right)^2=9$$

$$x^2+y^2-12y+36=9x^2+9y^2+36y+36$$

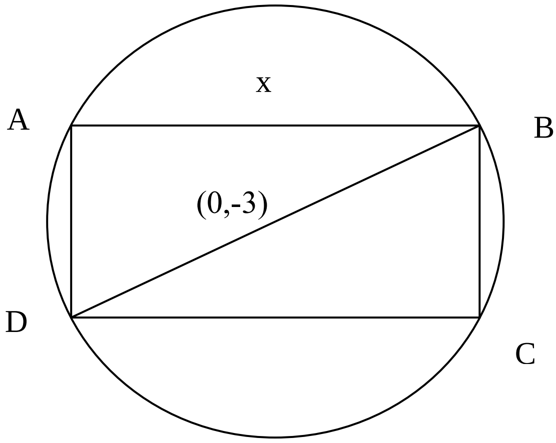
$$8x^2+8y^2+48y=0/:8$$

$$x^2+y^2+6y=0$$

$$(x-0)^2+(y+3)^2=0/+9$$

$$x^2+(y+3)^2=9$$

ב.



$AB = x$

$BD = 6$

נמצא את AD ע"פ פיתגורס :

$$AD^2 + x^2 = 36$$

$$AD = \sqrt{36 - x^2}$$

$$P = 2AD + 2AB = 12$$

$$2\sqrt{36 - X^2} + 2x = 12 \,/\, :^2$$

$$\left(\sqrt{36 - x^2}\right)^2 = (6 - x)^2$$

$$36 - x^2 = 36 - 12x + x^2$$

$$2x^2 - 12x = 0$$

$x = 0$ $\quad$ $x = 6$

אורך אינו יכול להיות שווה 0.

לא יכול להיות כי הניצב צריך להיות קטן מהיתר BD.

תרגיל 3 :

מקבילית ABCD מונחת על מישור π שהצגתו הפרמטרית היא

$\underline{x} = (6,-2,-5) + t(2,-2,-1) + k(-6,2,-1)$

שלושה מקודקודי המקבילית הם : $A(4,0,z) \quad , \quad B(2,2,-3) \quad , \quad C(-2,2,-5)$

א. מצא את שיעורי הקודקוד D.

ב. ישר המאונך למישור π עובר דרך הקדקוד D.

נקודה E נמצאת על ישר זה.

הקטע AE מונח על הישר $\underline{x} = (4,0,-4) + r(3,-2,4)$.

מצא את שטח המשולש AED.

בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

פתרון :

$$\pi : \underline{x} = (6,-2,-5) + t(2,-2,-1) + k(-6,2,-1)$$

$$A(4,0,z) \quad , \quad B(2,2,-3) \quad , \quad C(-2,2,-5)$$

נמצא משוואת מישור : $ax + by + cz + d = 0$

$$\underline{u} \times \underline{v} = (a,b,c) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$a = 2 - (-2) = 4$$

$$b = 6 - (-2) = 8$$

$$c = 4 - 12 = -8$$

d עדיין לא נקבע :

$$4x + 8y - 8z + d = 0 / : 4$$

$$x + 2y - 2z + d = 0$$

נציב $(6,-2,-5)$:

$$6 + 2 \cdot (-2) - 2 \cdot (-5) + = 0$$

$$6 - 4 + 10 + d = 0$$

$$d = -12$$

$$\pi : x + 2y - 2z - 12 = 0$$

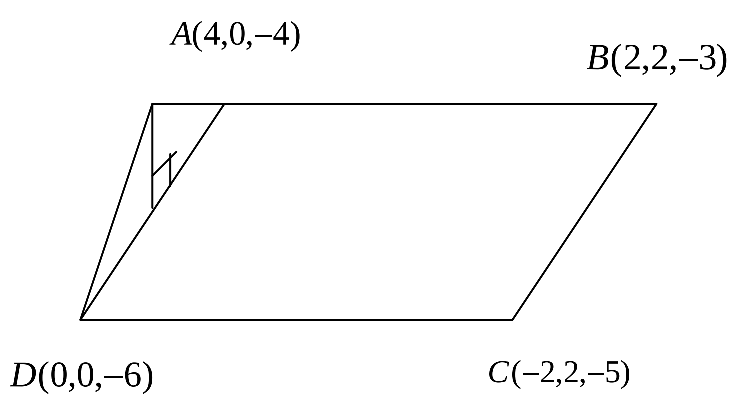
נקי' A מקיימת משוואה זו :

$$4 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot z - 12 = 0$$

$$-2z - 8 = 0$$

$$z = -4$$

$$C(4,0,-4)$$



$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = (2,-2,-1)$

$D = C + \overrightarrow{CD} = (-2,2,-5) + (2,-2,-1)$

$\boxed{D = (0,0,-6)}$

ב. וקטור ניצב למישור: $(1,2,-2)$, ישר שניצב ל- π ועובר ב- D:

$l_1 : (0,0,-6) + P(1,2,-2)$

נקודת E כללית

$E(P,2P,-6-2P)$

וקטור AE כללי

$\overrightarrow{AE} = (P-4,2P,-6-2P-(-4))$

$\overrightarrow{AE} = (P-4,2P,-6-2P)$

נתון:

$l_2 = (4,0,-4) + r(3,-2,4)$

$$\overrightarrow{AE} = 2\underline{w} \Rightarrow \frac{P-4}{3} = \frac{2P}{-2} = \frac{-2-2P}{4}$$

$$\frac{P-4}{3} = \frac{2P}{-2} = -P$$

$P-4 = -3P \Rightarrow 4P = 4$

$\boxed{P=1}$

בדיקה:

$$\frac{P-4}{3} = -1$$

$$\frac{-2-2P}{4} = -1$$

נציב P=1 ב-E:

$E(1,2,-8)$

h מרחק נקודה E ממישור π :

גובה המשולש $\quad h = \dfrac{1+2\cdot 2-2\cdot(-8)-12}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}$

$A(4,0,-4)$

$D = (0,0,-6)$

$$h = \frac{9}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3$$

$AD^2 = (4-0)^2 + (0-0)^2 + (-4-(-6))^2 =$

$16+4 = 20$

$DA = \sqrt{20}$

$$S_{ADE} = \frac{1}{2}AD\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{20} = \frac{3}{2}\sqrt{20} = \sqrt{45} = 6.71$$

$\boxed{S_{ADE}=6.71}$

תרגיל 4:

א. נתונה הנגזרת של הפונקציה $f(x)$: $f'(x)=\frac{6x}{\sqrt[4]{x^2+t}}$. t הוא פרמטר.
המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=3$ מאונך לישר $\sqrt{5}x+18y=0$.
הערך של הפונקציה $f(x)$ בנקודת הקיצון שלה הוא 10.
מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. z הוא מספר מרוכב, והביטוי $\frac{z-1}{z+1}$ הוא מספר מדומה.
הוכח כי z נמצא על מעגל היחידה.
הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

פתרון:

א.

$$f'(x)=\frac{6x}{\sqrt[4]{x^2+t}}$$

$$\sqrt{5}x+18y=0 \Rightarrow y=-\frac{\sqrt{5}}{18}x$$

$$m_1=-\frac{\sqrt{5}}{8}$$

$$m=-\frac{1}{m_1}=\frac{18}{\sqrt{5}}=f'(x=3)$$

$$\frac{6\cdot 3}{\sqrt[4]{9+t}}=\frac{18}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sqrt[4]{9+t}=\sqrt{5}$$

$$9+t=25$$

$$t=16$$

$$f'(x)=6x(x^2+16)^{-\frac{1}{4}}$$

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int 6x\left(x^2+16\right)^{-\frac{1}{4}}dx-3\int 2x(x^2+16)^{-\frac{1}{4}}dx=$$

$$3\cdot\frac{(x^2+16)^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}=4(x^2+16)^{\frac{3}{4}}+C$$

בדיקה:

$$\left[4\cdot\left(x^2+16\right)^{\frac{3}{4}}\right]=4\cdot\frac{3}{4}\left(x^2+16\right)^{\frac{3}{4}-1}\cdot 2x=6x(x^2+16)^{-\frac{1}{4}}$$

נמצא נקודת קיצון:

$$f'(x)=\frac{6x}{\sqrt[4]{x^2+t}}=0 \Rightarrow x=0$$

סימן בלבב לקבלת קיצון:

$f''(x)=6\neq 0$ אכן קיצון

$f(0)=10$

$10=4(0^2+16)^{\frac{3}{4}}+C=$

$4\cdot 16^{\frac{3}{4}}+C=10$

$4\cdot 8+C=10$

$32+C=10$

$C=-22$

$$\boxed{f(x)=4(x^2+16)^{\frac{3}{4}}-22}$$

ב. נתון : $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ מדומה (טהור).

$\mathrm{Re}=\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)=0$

$z=x+yi$

$w=\dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{x-1+yi}{x+1+yi}$

$w=\dfrac{(x-1)+yi}{(x+1)+yi}\cdot\dfrac{(x+1)-yi}{(x+1)-yi}=$

$=\dfrac{(x-1)(x+1)-(x-1)yi+(x+1)yi+y^2}{(x+1)^2+y^2}$

$\mathrm{Re}(w)=\dfrac{(x-1)(x+1)+y^2}{(x+1)^2+y^2}=0$

$x^2-1+y^2=0$

$x^2+y^2=1$

$|z|^2=x^2+y^2=1$

$|z|=1$

לכן z נמצא על מעגל היחידה.

תרגיל 5 :

נתונה הפונקציה $f(x)\frac{e^x}{e^x+b}$ b הוא פרמטר גדול מ-0.

א. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ג. הבע באמצעות b את נקודת החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

ד. נתון כי לפונקציה יש נקודת פיתול אחת הראה כי :

(1) שיעור ה- y של נקודת הפיתול של הפונקציה אינו תלוי ב- b.

(2) שיפוע המשיק בנקודת הפיתול אינו תלוי ב-b .

ה. סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה עבור :

(1) b=e

(2) $b=\frac{1}{e}$

סמן את הגרפים במספרים (1) ו- (2) בהתאמה.

ו. העבירו משיק בנקודת הפיתול לפונקציה שעבורה $b=e$,

והעבירו משיק בנקודת הפיתול לפונקציה שעבורה $b=\frac{1}{e}$.

מצא את שטח המרובע הנוצר על ידי שני המשיקים, על ידי ציר ה-x
ועל ידי ישר העובר דרך שתי נקודות הפיתול.

פתרון:

$$b>0 \qquad\qquad f(x)\frac{e^x}{e^x+b}$$

א. אסימפטוטות:

אופקיות:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{0}{0+b}=0 \quad\Rightarrow\quad y=1,\; y=o$$

אנכית:אין.

$$e^x+b=0\Rightarrow\emptyset$$

ב. עלייה וירידה:

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x+b)-e^x\cdot e^x}{(e^x+b)^2}=\frac{e^{2x}+be^x-e^{2x}}{(e^x+b)^2}$$

$$f'(x)=\frac{be^x}{(e^x+b)^2}=0\Rightarrow e^x=0\Rightarrow\emptyset$$

לכל x

$$b>o$$

$$e^x>0 \qquad \Rightarrow f'(x)>0$$

$$(e^x+b)^2>0$$

הפונקציה עולה לכל x

ג. נקודות חיתוך עם הצירים:

ציר x: אין

$$0=\frac{e^x}{e^x+b}\Rightarrow\emptyset$$

ציר y: $\left(0,\frac{1}{1+b}\right)$

$$f(0)=\frac{e^0}{e^0+b}=\frac{1}{1+b}$$

$$f''(x)=\frac{be^x\left(e^x+b\right)^2-be^x\cdot 2\left(e^x+b\right)\cdot e^x}{\left(e^x+b\right)^4}$$

$$=\frac{\left(e^x+b\right)\left[be^x\left(e^x+b\right)-2be^{2x}\right]}{\left(e^x+b\right)^4}=0$$

ד. (1)

$$be^x+b^2\cdot e^x-2be^{2x}=0\backslash:e^x>0$$

$$b^2-be^x=o\backslash:b>0$$

$$b-e^x=0$$

$$e^x=b$$

$$x=\ln b$$

$$e^x=e^{\ln b}=b$$

לא תלוי ב- b:

$$f(\ln b)=\frac{e^{\ln b}}{e^{\ln b}+b}=\frac{b}{b+b}=\frac{b}{2b}=\frac{1}{2}$$

נקודת פיתול : $\left(\ln b,\frac{1}{2}\right)$

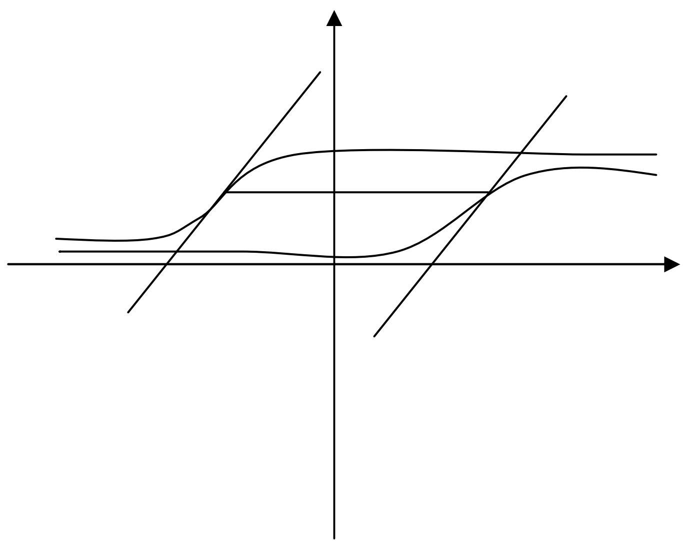
(2)

$$f'(\ln b)=\frac{b\cdot e^{\ln b}}{\left(e^{\ln b}+b\right)^2}=\frac{b\cdot b}{(b+b)^2}=\frac{b^2}{(2b)}=\frac{b^2}{4b^2}=\frac{1}{4}$$

לא תלוי ב- b:

$$f(\ln b)+m$$

ה.



ו. השטח המבוקש הוא מקבילית מאחר ושיפוע המשיקים $m=\frac{1}{4}$ אינו תלוי ב- b וכן שיעור y נקודת

הפיתול $y=\frac{1}{2}$ גובה המקבילית לצלע AB (ראה ציור)

$$h=\frac{1}{2}$$

$$AB=DC=1-(-1)=2$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

$$S=1$$