

פתרונות שאלון 007 חורף 2009

1. א.

$$A(t_1, y_1), B(t_2, y_2)$$

$$F_1\left(\frac{p}{2}, 0\right), F_2\left(\frac{p}{4}, 0\right)$$

מציאת A: חיתוך הישר  $\ell: y = mx$  עם פרבולה I  $y^2 = 2px$ .

$$A\left(\frac{2p}{m^2}, \frac{2p}{m}\right) \quad m^2 x^2 = 2px \Rightarrow x_1 = \frac{2p}{m^2} \quad y_1 = mx_1 = m \cdot \frac{2p}{m^2} = \frac{2p}{m}$$

מציאת B: חיתוך הישר  $y = mx$  עם פרבולה II  $y^2 = px$

$$A\left(\frac{p}{m^2}, \frac{p}{m}\right) \quad m^2 x^2 = px \Rightarrow x_2 = \frac{p}{m^2} \quad y_2 = mx_2 = m \cdot \frac{p}{m^2} = \frac{p}{m}$$

$$m_1 = \frac{p_1}{y_1} = \frac{p}{\frac{2p}{m}} = \frac{m}{2} : \ell_1 \text{ שיפוע המשיק}$$

$$m_2 = \frac{p_2}{y_2} = \frac{\frac{p}{2}}{\frac{p}{m}} = \frac{m}{2} : \ell_2 \text{ שיפוע המשיק}$$

ומכאן:  $m_1 = m_2 = \frac{m}{2}$ . המשיקים מקבילים.

תשובה: הוכחה.

ב.

$$S_{\Delta DCA} = \frac{CD\left(t_1 + \frac{p}{2}\right)}{2} \quad S_{\Delta DCB} = \frac{CD\left(t_2 + \frac{p}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{S_{\Delta DCA}}{S_{\Delta DCB}} = 1.5 = \frac{\frac{CD\left(t_1 + \frac{p}{2}\right)}{2}}{\frac{CD\left(t_2 + \frac{p}{2}\right)}{2}} \Rightarrow \frac{t_1 + \frac{p}{2}}{t_2 + \frac{p}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$2x_1 + p = 3x_2 + 1.5p \Rightarrow 2x_1 = 3x_2 + 0.5p \Rightarrow 2 \frac{2p}{m^2} = 3 \frac{p}{m^2} + 0.5p$$

$$\frac{4}{m^2} = \frac{3}{m^2} + 0.5 \Rightarrow 4 = 3 + 0.5m^2 \Rightarrow m^2 = 2 \Rightarrow m = \sqrt{2}$$

תשובה:  $m = \sqrt{2}$

מציאת הנקודה L (חיתוך של הישרים I ו-II).

$$I: y = -2x + 8$$

$$II: y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$$

$$-2x + 8 = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$$

$$-6x + 24 = x + 10$$

$$14 = 7x$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 4 \quad L(2,4)$$

L נמצאת על הישר ועוברת דרך הנקודה P. ולכן, מקיימת את משוואת הקו.

$$(2+k)2 - 2 \cdot 4 - 8 + 10k = 0$$

$$12k - 12 = 0$$

$$k = 1$$

ולכן משוואת הקו L:

$$3x - 2y - 8 + 10 = 0$$

$$3x - 2y + 2 = 0$$

שיעורי הנקודה P:  $P(0,1)$   $\Rightarrow x = 0, y = 1$

P אמצע AB ולכן:

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 1 \Rightarrow y_1 + y_2 = 2$$

$$y_1 = -2x_1 + 8$$

$$y_2 = \frac{1}{3}x_2 + \frac{10}{3}$$

$$-2x_1 + 8 + \frac{1}{3}(-x_1) + \frac{10}{3} = 2$$

$$-6x_1 + 24 - x_1 + 10 = 6$$

$$28 = 7x_1$$

$$x_1 = 4 \Rightarrow y = 0 \quad A(4,0)$$

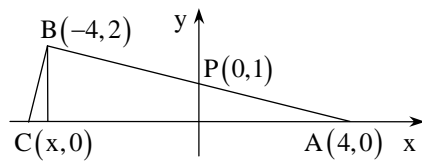
$$m_{AB} = m_{AP} = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{1 - 0}{0 - 4} = -\frac{1}{4}$$

$$\tan \alpha = -\frac{1}{4}$$

$$\alpha = 165.96^\circ$$

תשובה:  $\alpha = 165.96^\circ$

ב.



$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot h}{2} = 8.5$$

$$AC = 8.5$$

ומכאן,  $x = -4.5$ . כלומר, שיעורי הנקודה C הם:  $C(-4.5, 0)$ .

משוואת המשיק למעגל בנקודה B:

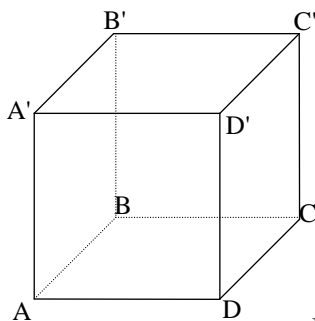
$$-4x + (y-1)(0-1) = 17$$

$$-4x + y - 1 = 17$$

חיתוך המשיק עם ציר x:  $y = 0$  ולכן,

$$-4x = 18 \Rightarrow x = -4.5$$

כלומר, המשיק חותך את ציר ה-x בנקודה  $C(-4.5, 0)$  ולכן הישר BC משיק למעגל זה.



$$A'B'BA: \quad 2x - y + 2z = 4$$

$$B'C'CD: \quad 2y + z = 0$$

$$A'(2, -2, z)$$

$$2 \cdot 2 - (-2) + 2z = 4, \text{ ולכן } A'B'BA \text{ מישור } A'$$

$$\text{כלומר, } A'(2, -2, -1).$$

א.

ישר החיתוך של המישורים  $A'B'BA$ ,  $B'C'CB$  הוא ישר  $B'B$ .

וקטור הכיוון שלו הוא הוקטור המאונך למישור  $A'B'C'D'$  המבוקש.

מציאת ישר החיתוך  $B'B$ :

$$2y + z = 0 \Rightarrow z = -2y$$

$$2x - y + 2z = 4 \Rightarrow 2x = y - 2z + 4 = y - 2(-2y) + 4 = 5y + 4 \Rightarrow x = 2.5y + 2$$

מציאת שתי נקודות על הישר:

$$M_1(8, 0, 0) \quad \text{עבור: } x = 2, z = 0, y = 0$$

$$M_2(7, 8, -4) \quad \text{עבור: } x = 7, z = -4, y = 2$$

ומכאן וקטור הכיוון של  $B'B$  הוא  $\underline{h}_{B'B} = (5, 2, -4)$ . ומכאן:  $\pi_{A'B'C'D'}: 5x + 2y - 4z + d = 0$ .

$$5 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) - 4 \cdot (-1) + d = 0 \Rightarrow d = -10 \text{ ולכן: } A' \text{ נמצאת עליו ולכן: } d = -10$$

$$\pi_{A'B'C'D'}: 5x + 2y - 4z = 10 \text{ מכאן:}$$

$$\pi_{A'B'C'D'}: 5x + 2y - 4z = 10 \text{ תשובה:}$$

ב. (1)

הישר  $A'B'$  מאונך למישור  $B'C'CB$ . ולכן, וקטור שלו הוא הוקטור המאונך למישור

$B'C'CB$ . כלומר,  $\underline{h} = (0, 2, 1)$  ולכן הצגה פרמטרית של הישר  $A'B'$  היא:

$$\ell_{A'B'} = \underline{x} = (2, -2, -1) + t(0, 2, 1)$$

$B'$  היא נקודת החיתוך של הישר  $\ell_{A'B'}$  והמישור  $B'C'CD$ .

מציאת  $B'$ :

$$x = 2, y = -2 + 2t, z = -1 + t$$

נציב במשוואת המישור  $B'C'CD$ :

$$2(-2 + 2t) + (-1 + t) = 0$$

$$-4 + 4t - 1 + t = 0$$

$$t = 1$$

$$\text{ולכן: } B' = (8, -2, -1) + (0, 2, 1) = (2, 0, 0)$$

(2)

הישר המבוקש הוא הישר  $B'C'$ .

וקטור הכיוון שלו הוא הווקטור המאונך למישור  $A'B'BA$  והוא  $\underline{h} = (2, -1, 2)$ .

ולכן הצגה פרמטרית שלו תהיה:  $\ell_{B'C'} = \underline{x} = B' + t\underline{h}$

כלומר:  $\underline{x} = (2, 0, 0) + t(2, -1, 2)$ .

תשובה:  $\underline{x} = (2, 0, 0) + t(2, -1, 2)$

4. א.

$$2\ln 2 + \left(1 + \frac{1}{2x}\right) \ln 3 = \ln \left(3^{\frac{1}{x}} + 27\right)$$

$$\ln 2^2 + \ln 3^{1 + \frac{1}{2x}} = \ln \left(3^{\frac{1}{x}} + 27\right)$$

$$\ln \left(4 \cdot 3^{1 + \frac{1}{2x}}\right) = \ln \left(3^{\frac{1}{x}} + 27\right)$$

$$4 \cdot 3^{1 + \frac{1}{2x}} = 3^{\frac{1}{x}} + 27$$

$$4 \cdot 3 \cdot 3^{\frac{1}{2x}} = 3^{\frac{1}{x}} + 27$$

$$12 \left(3^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{x}} + 27$$

נסמן:  $t^2 = 3^{\frac{1}{x}}$

$$12t = t^2 + 27$$

$$t^2 - 12t + 27 = 0 \Rightarrow (t-3)(t-9) = 0 \rightarrow t_1 = 3, t_2 = 9$$

I.  $3^{\frac{1}{x}} = 3^2 \Rightarrow \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$

II.  $3^{\frac{1}{x}} = 9^2 = 3^4 \Rightarrow \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{4}$

תשובה:  $x = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}$

ב.

למשוואה הריבועית פתרון יחיד כאשר: I.  $a = 0$

II.  $\Delta = 0$

(1)

I.

$$a = 0$$

$$mi + 4 = 0$$

$$m = -\frac{4}{i} = 4i$$

כאשר  $m = 4i$  המשוואה תהיה בלתי אפשרית:  $(0 \cdot z^2 + 0 \cdot z - 2 = 0)$

II.  $\Delta = 0$ . כלומר,

$$(m - 4i)^2 + 8(mi + 4) = 0$$

$$m^2 - 8im - 16 + 8mi + 32 = 0$$

$$m^2 = -16 \Rightarrow m_1 = 4i \text{ } \emptyset, m_2 = -4i$$

תשובה:  $m = -4i$ .

(2)

עבור  $m = -4i$  המשוואה תהיה:  $8z^2 - 8iz - 2 = 0$ .

ומאחר ו- $\Delta = 0$  הפתרון:  $z = \frac{-5}{24} = \frac{8i}{16} = \frac{1}{2}i$

תשובה:  $z = \frac{1}{2}i$ .

5. א.

$$f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x} \quad (1)$$

תחום הגדרה:

$$\begin{aligned} \frac{1-x}{1+x} &> 0 \\ (1-x)(1+x) &> 0 \\ 1-x^2 &> 0 \\ -1 < x < 1 \end{aligned}$$

תשובה:  $-1 < x < 1$

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \left( \frac{1-x}{1+x} \right)' = \frac{x+1}{1-x} \cdot \frac{-1(x+1) - (1-x) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{-x-1-1+x}{(1-x)(1+x)} \\ f'(x) &= \frac{-2}{1-x^2} = \frac{2}{x^2-1} \end{aligned}$$

לא קיים  $x$  עבורו  $f'(x) = 0$  ולכן אין נקודות קיצון.

תשובה: אין.

ב. (1)

$$g(x) = \frac{1}{x^2-1} \quad g'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

נקודות חשודות:  $g'(x) = 0$  כלומר,  $-2x = 0$  , נקודה חשודה  $x = 0$ .

בדיקת נקודות קיצון:  $g''(x) = \frac{-2}{(x^2-1)^2}$  הנקודות חשודות.

מקסימום:  $g''(2) = -2 < 0$

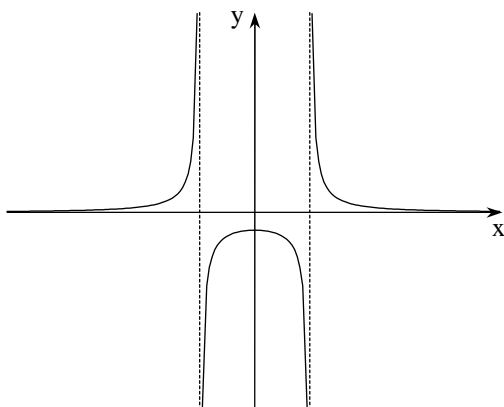
תשובה:  $\text{Max}(0, -1)$

(2)

אסימפטוטה אנכית:  $y = 0$

אסימפטוטה אופקית:  $x = 1$ ,  $x = -1$

סקיצה של גרף הפונקציה:





ג.

השטח המקווקו :

$$S = \int_0^{0.5} \left[ (2x-1) - \frac{1}{x^2-1} \right] dx$$

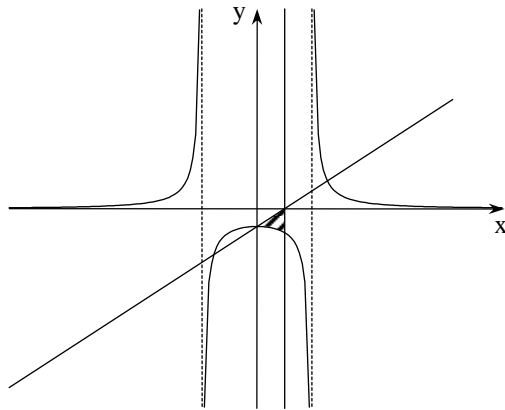
על פי סעיף א' :

$$g(x) = \frac{1}{2} f'(x)$$

ולכן :

$$\int g(x) = \frac{1}{2} f(x) + c$$

ומכאן :



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{0.5} \left[ (2x-1) - \frac{1}{x^2-1} \right] dx = \left[ x^2 - x - \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} \right]_0^{0.5} = \\ &= \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \right] - \left( \frac{1}{2} \ln 1 \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} = \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 3 = 0.2993 \end{aligned}$$

$S = 0.2993$  : תשובה