

סוג הבחינה: בגרות  
מועד הבחינה: קיץ תשפ"ב, 2022  
מספר השאלה: 035581  
נספח: דפי נוסחאות ל-5 ייחידות לימוד

**משמעותו של ביצוע הבחינה:**  
שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.  
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

## **מתמטיקה**

### **5 ייחידות לימוד – שאלון ראשון**

#### **הוראות**

א. **משר候 הבחינה:** שלוש שעות וחצי.

ב. **מבנה השאלה וMETHOD:** בשאלון זה שלושה פרקים, וביהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – אלגברת היסטבורה

פרק שני – גאומטריה וטיגונומטריה במישור

פרק שלישי – חישובים דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רצינליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמישה שאלות לבחירתכם –  $5 \times 20 = 100$  נקודות.

#### **חומר עזר מותר בשימוש:**

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכונות במחשבון שיש בו אפשרות תכננות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכונות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

#### **הוראות מיוחדות:**

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספורה בלבד.

(2) יש להתחליל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרה מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בזכין או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיווה" בראש כל עמוד המשמש טיווה.

כתבת טיווה בדף שעינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

**השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון ובים, אף על פי כן על כל תלמיד וכל תלמיד להסביר עליהם באופן אישי.**

**בהצלחה!**

## השאלות

**שימוש לב:** יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.  
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בעיון או לפסילת הבדיקה.

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

**שימוש לב:** אם תענו על יותר מ חמישה שאלות, יבדקו רק חמיש התשובות הראשונות שבמחברת.

## פרק ראשון – אלגברת והסתברות

1. משאית יצאה מבאר שבע לחיפה במהירות קבועה  $v_1$ . באותו הזמן בדיקן יצא מכונית מהיפה לבאר שבע ב מהירות קבועה  $v_2$ . המרחק בין חיפה לבאר שבע הוא 210 ק"מ. המשאית נעצרה בצד הדרכן עקב תקלת, לפני שחלפה המכונית על פניה. באותו הזמן המרחק בין המשאית לבין המכונית היה 96 ק"מ.
  - a. הקבעו באמצעות  $v_1$  ו- $v_2$  את הזמן שחלף מרגע תחילת הנסעה ועד שנעצרה המשאית בצד הדרכן. זמן שהייתה המשאית בצד הדרכן היה גדול פי 1.5. מן הזמן שחלף מרגע יציאתה מבאר שבע עד לרגע עצירתה. המשאית יצאה שוב לדרכן באותה מהירות,  $v_1$ , בדיקן ברגע שבו חלפה המכונית על פניה.
  - b. מצאו את היחס בין מהירות המכונית לבין מהירות המשאית.
- 128 דקוט לאחר שיצאה המשאית שוב לדרכן, היא הגיעה לחיפה.
- ג. מצאו את מהירות המכונית ואת מהירות המשאית.

.2. סדרה I היא סדרה הנדסית אינסופית שאיבריה הם  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ומנתה היא  $z^2$ .

$$\text{נתון: } 0 < r < \frac{1}{3}$$

בין כל שני איברים בסדרה I הכנסו איבר נוסף, ונוצרה סדרה הנדסית חדשה יורדת, סדרה II, שאיבריה הם  $b_1, b_2, b_3, \dots$  ומנתה היא q.

א. (1) הביעו את q באמצעות z.

(2) הסבירו מדוע שתי הסדרות I ו II מתכנסות.

$$\text{נתון כי סכום סדרה II גדול פי } \frac{4}{3} \text{ מסכום סדרה I.}$$

ב. חשבו את q.

נתון כי סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה II הוא 18.

ג. מצאו את סכום כל האיברים של סדרה II במקומות שמתחלקים ב-5 ( $\dots, b_5, b_{10}, b_{15}, \dots$ ).

ד. מצאו בסדרה II את היחס בין האיבר החמישי לבין סכום כל האיברים שאחורי איבר זה.

ה. הוכיחו כי בכל סדרה הנדסית מתכנסת היחס בין איבר כלשהו לבין סכום כל האיברים שאחורי אינו תלוי במיקום של האיבר בסדרה.

.3. נטע משחкат במשחק מסויים. במשחק זה יש לבדוק שלוש תוצאות אפשריות: ניצחון, תיקו והפסד.

הסתברות שנטע תנצה במשחק גדולה פי 3 מן ההסתברות שהיא תפסיד במשחק.

נסמן ב- k את ההסתברות שנטע תפסיד במשחק ( $0 < k < 1$ ).

בשאלה יכולה תוצאות המשחקים אין תלויות זו בזו.

נתון שגם נטע משחкат 2 משחקים זה אחר זה, ההסתברות שהיא תנצה במשחק אחד לפחות היא 4.5k.

א. מצאו את הערך של k.

נטע שיחקה 5 משחקים זה אחר זה.

ב. מצאו את ההסתברות שנטע תנצה ב- 3 משחקים לפחות.

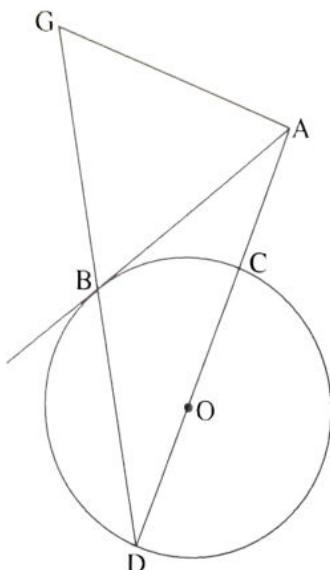
ג. מצאו את ההסתברות שנטע תנצה בשלושת המשחקים הראשונים לפחות.

ד. (1) מצאו את ההסתברות שנטע לא תפסיד בשום משחק.

(2) ידוע כי נטע הפסידה במשחק אחד לפחות. מהי ההסתברות שהיא ניצחה בשלושת המשחקים הראשונים

וקיבלה תוצאה תיקו במשחק האחרון?

## פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. נתון מעגל שרדיוסו  $R$  ומרכזו  $O$ .

נקודה  $A$  שמחוץ למעגל יוצאים שלושה ישרים:

הישר  $AB$  משיק למעגל בנקודה  $B$ ,

הישר  $AD$  עובר דרך מרכזו  $O$  וחותך את המעגל בנקודות  $C$  ו-  $D$ ,

והישר  $AG$  מאונך לישר  $AD$  (ראו סרוטות).

נקודות  $D$ ,  $B$  ו-  $G$  נמצאות על ישר אחד, כמתואר בסרוטו.

נסמן:  $\angle ADB = \alpha$ .

א. הביעו את כל זוויות המשולש  $ABG$  באמצעות  $\alpha$ .

$$\text{ב. הוכחו: } \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$$

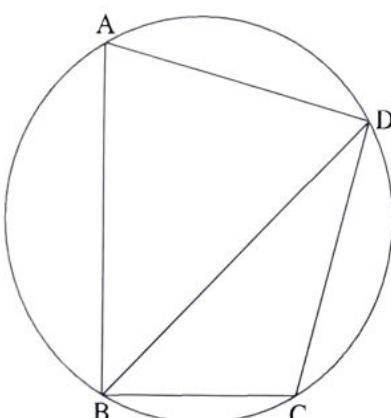
נתון:  $AG = 5$ ,  $AC = \frac{1}{2}DC$

ג. חשבו את  $R$ .

נסמן ב-  $S$  את שטח המשולש  $BDC$ .

ד. (1) הוכחו:  $\triangle ADG \sim \triangle BDC$

(2) הביעו את שטח המשולש  $ADG$  באמצעות  $S$ .



5. מרובע  $ABCD$  חסום במעגל שרדיוסו  $R$  ומרכזו  $O$  (ראו סרוטות).

נסמן:  $\angle DAB = \alpha$ ,  $\alpha$  היא זוית חדה.

א. הביעו את אורך האלכסון  $BD$  באמצעות  $\alpha$  ו-  $R$ .

$$\text{נתון: } CD = R\sqrt{2}, BC = R$$

ב. חשבו את  $\alpha$ .

נתון:  $BD$  הוא חוצה זוית  $ABC$ .

ג. חשבו את גודל הזווית  $ABD$ .

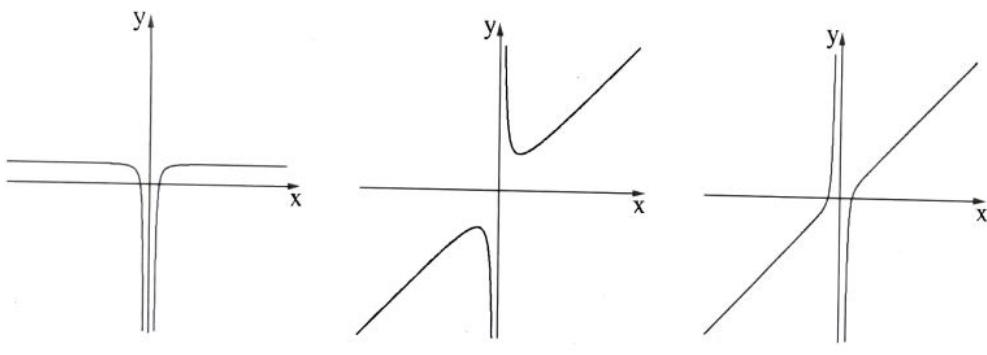
נסמן ב-  $h_1$  את הגובה שיורט מקודקוד  $A$  במשולש  $ABD$ ,

וב-  $h_2$  את הגובה שיורט מקודקוד  $O$  במשולש  $BOD$ .

$$\text{ד. חשבו את } \frac{h_1}{h_2}$$

### פרק שלישי – חישוב דיפרנציאלי וaintגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רצינליות ושל פונקציות טרייגונומטריות

6. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{3}{x} + 3x$ .
- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
  - האם הפונקציה  $f(x)$  זוגית, אי-זוגית או לא-זוגית? הוכיחו את התשובה.
  - מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה  $f(x)$ .
- נתונות שתי פונקציות:  $f'(x)$  ו-  $g(x)$ .
- $f'(x) = f(x) \cdot g(x)$ , ו-  $f'(x)$  מקיימת  $f'(x) > 0$ .
- היא פונקציית הנגזרת של  $f(x)$ , ו-  $g(x)$  מוגדרת באותו תחום כמו הפונקציה  $f(x)$ .
- כל אחד מן הגרפים I–III שלפניכם מתאר את אחת הפונקציות  $f'(x)$ ,  $f(x)$  ו-  $g(x)$ .
- לכל אחת מן הפונקציות כתבו איזה גרף מותאם אותה. נמקו את התשובה.



גרף III

גרף II

גרף I

- g. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה  $g(x)$  עם ציר ה- $x$ .
- d. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה  $g(x)$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים  $x = 6$  ו-  $x = 1$ .
- h. נתון:  $a < 1$  הוא פרמטר. חשבו את  $\int_{\frac{1}{a}}^a g(x) dx$ .
- נתונה הפונקציה  $h(x) = \int_1^x f'(t) dt$ . נתון כי הפונקציה  $h(x)$  מוגדרת בתחום  $x \leq 1$ .
- i. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $h(x)$ , וקבעו את סוגה.

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2(\cos x)^2 + \sin 2x}{2 \cos x}$  בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .
- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $(x)$ .
  - הסבירו מדוע לפונקציה  $(x)$  אין אסימפטוטות המאונכות לציר ה-  $x$ .
  - מצאו את נקודות החיתוך של גраф הפונקציה  $(x)$   $f$  עם הצירים.
- ב.
- הראו כי לכל  $x$  בתחום ההגדרה של הפונקציה  $(x)$   $f$  מתקיים:  $x \cdot f'(x) = \cos x - \sin x$ .
  - מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $(x)$ , וקבעו את סוגן.
- ג.
- סרטטו סקיצה של גраф הפונקציה  $(x)$ .
  - $a$  הוא מספר. מצאו את כל ערכי  $a$  שבעבורם יש למשווה  $a = (x)$  פתרון יחיד בתחום  $2\pi \geq x \geq 0$ .
- ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי פונקציית הנגזרת  $(x)'f$ , על ידי ציר ה-  $x$  ועל ידי שני הישרים  $x = \frac{3}{4}\pi$  ו-  $x = \frac{5}{4}\pi$ .
8. נתונות שתי פונקציות:  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ ,  $f(x) = x^3$ .
- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $(x)$   $f$  ואת תחום ההגדרה של הפונקציה  $(x)$   $g$ .
  - מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גраф הפונקציה  $(x)$   $f$  עם גраф הפונקציה  $(x)$   $g$ .
- הנקודה A נמצאת על גראף הפונקציה  $(x)f$ , והנקודה B נמצאת על גראף הפונקציה  $(x)g$  כך שהקטע AB מקביל לציר ה-  $x$ .
- נתון כי שיעור ה-  $x$  של הנקודה A נמצא בין שיעורי ה-  $x$  של נקודות החיתוך של הפונקציה  $(x)$   $f$  עם הפונקציה  $(x)g$ .
- נסמן ב-  $c$  את שיעור ה-  $x$  של הנקודה A.  $c$  הוא פרמטר.
- ב. הביעו באמצעות  $c$  את אורך הקטע AB.
- ג. הנקודה O היא ראשית הצירים. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OAB.
- ד. האם השטח המקסימלי של המשולש OAB מתקבל כאשר אורך הקטע AB הוא מаксימלי? נמקו את התשובה.

### בצלחה!