הצעת פתרון – בחינת הבגרות במתמטיקה

חורף 2013 – שאלון 035007, 307

הצעת פתרון הבחינה במתמטיקה נכתבה על-ידי: מנחם מן, אוהד ריטרבנד, אודי נעים, צביקה מלכיאלי, מיקי בנימיני, יונתן ברמן, איתי הרטמן, משה כהן ואמנון הרפז מורים למתמטיקה בבתי הספר של קידום.

הפתרונות המופיעים בהצעת פתרון זו מובאים <u>בתמצות בלבד</u>. יש לפרט ולהרחיב כל אחד מהם בהתאם לדרישות הבחינה.

<u>גאומטריה אנליטית, וקטורים</u>

<u>שאלה מספר 1</u>

נתון: F_1 אמצע הקטע AF_2.

$$F_2(-C,0),\quad F_1(C,0),\quad A(a,0)$$

$$|AF_2| = a + c$$

$$|AF_1| = a - c \qquad |F_1F2| = 2c$$

לפי הנתון: $2c = a - c$

$$a = 3c$$

נתון: העבירו דרך שניים מהקודקודים מעגל (נגיד דרך A ו-B) ודרך (0,0). קוטר המעגל הוא $\sqrt{17}$.

פענוח: אם A, B ו- O נמצאים על המעגל, ו-$\angle AOB = 90°$ אז AB הוא הקוטר!

$AB = \sqrt{17}$

$$A(a,0) \quad B(0,b)$$

$$AB = \sqrt{(a-0)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{17}$$

$$a^2 + b^2 = 17$$

סה"כ הנתונים והמשוואות פתרונן:

$$a^2 + b^2 = 17$$
$$b^2 = 17 - \mathrm{a}^2$$
$$a = 3c$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$(3c)^2 = 17 - (3c)^2 + c^2$$
$$9c^2 = 17 - 8c^2$$
$$17c^2 = 17$$
$$\left[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1\right]$$
$$[8x^2 + 9y^2 = 72]$$

פתרונן:

$$\begin{cases} c = 1 \\ a = 3 \\ b = \sqrt{8} \end{cases}$$

א. משוואת האליפסה:

$$A(3,0) \quad B\left(0, \sqrt{8}\right)$$
$$F_1(1,0) \quad F_2(-1,0)$$
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$$

ב. נפח הפירמידה:

נסמן $M1, M2, M3, M4$ מרכזי המעגלים המתוארים בשאלה הם נקודות האמצע של AB, A_1B, AB_1, A_1B_1 בהתאמה.

לפי נוסחת נקודת האמצע:

$$M_1=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\quad M_2=\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\quad M_3=\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\quad M_4=\left(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

$M_1M_2M_3M_4$ הוא מלבן ששטחו: $S=3\sqrt{8}$

גובה הפירמידה = מרחק הנקודה $S(0,3,4)$ מהמישור $z=0$ והוא שווה ל-4.

$$\underset{\text{גובה הפירמידה}}{h}=\frac{0\cdot 0+0\cdot 3+4+0}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=4$$

$$\underset{\text{נפח פירמידה}}{V}=\frac{1}{3}\cdot S\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{8}\cdot 4=4\sqrt{8}$$

<u>שאלה מספר 2</u>

נתונים: $B(0,3)$, $A(0.1)$ נקודת השקה לציר y.

א. הוכחה ש-$MC = \frac{1}{2}AB$:

צ"ל כי $MC = \frac{1}{2}AB$.

פתרון:

$\begin{cases} MC = BC \\ MC = AC \end{cases}$ (שני משיקים למעגל מנקודה אחת שווים)

נסמן: $MC = BC = AC = k$

$\text{AB} = 2k \rightarrow [MC = \frac{1}{2}AB]$ (הוכחה)

ולכן: C(0,2)

$\angle\text{AMB} = 90°$ (משולש AMB שבו תיכון לצלע שווה למחציתה הוא ישר זווית).

ב.

(1) משוואת המקום הגיאומטרי:

$AB^2 = AM^2 + BM^2$

$2^2 = (x-0)^2 + (y-1)^2 + (x-0)^2 + (y-3)^2$

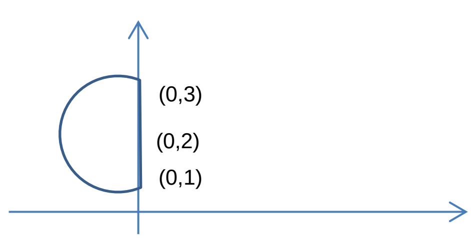
$1 = x^2 + y^2 - 4y + 4$

$[x^2 + (y-2)^2 = 1]$

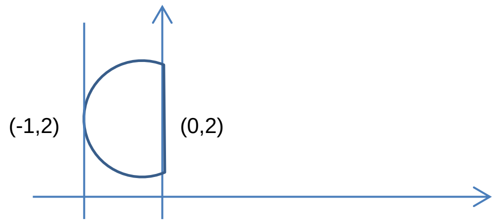
מעגל שמרכזו (0,2) ורדיוסו 1.

(2) צורת המקום הגיאומטרי והרביע:

צורת המקום הגיאומטרי של הנקודות M היא חצי מעגל ברביעים II ו-III.



ג. שיעורי הנקודה:



משוואת המדריך היא x=-1.

$$x=-\frac{p}{2}\rightarrow p=2$$

משוואת הפרבולה $y^2=4x$

המוקד $(\frac{p}{2},0)$ הוא $(1,0)$.

ע״פ הגדת הפרבולה. מרחק נקודה (x,y) שעליה מהמוקד $r=x+\frac{p}{2}$

נתון: $p=2, r=10$

$$10=x+1$$

$$x=9$$

$$y^2=4x=36$$

$$y=\pm 6$$

$$\begin{bmatrix}(9,6)\\(9,-6)\end{bmatrix}$$

<u>שאלה מספר 3</u>

נתונים :

שני ישרים מצטלבים.

E אמצע AB.

$$\overrightarrow{FE} = \underline{v}$$

$$\overrightarrow{CF} = \underline{u}$$

$$\overrightarrow{EA} = \underline{w}$$

נתון :

$$|\underline{u}| = \sqrt{7} \qquad |\underline{v}| = \sqrt{13} \qquad |\underline{w}| = \sqrt{5}$$

$$\underline{u} \cdot \underline{u} = 7 \qquad \underline{v} \cdot \underline{v} = 13 \qquad \underline{w} \cdot \underline{w} = 5$$

$$\underline{v} \perp \underline{u}$$

$$\underline{v} \perp \underline{w}$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \qquad \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

קוסינוס הזווית בין $\underline{u}$ ל-$\underline{w}$ הוא $\frac{\sqrt{35}}{10}$.

$$\underline{u} \cdot \underline{w} = \frac{\sqrt{35}}{10} = 3.5$$

א. זווית ABC :

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EA}=\underline{w}$$

$$\overrightarrow{BA}=2\underline{w}$$

$$\overrightarrow{BC}=\underline{w}-\underline{v}-\underline{u}$$
$$\left|\overrightarrow{BA}\right|=\left|2\underline{w}\right|=2\sqrt{5}$$
$$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=(\underline{w}-\underline{v}-\underline{u})\cdot(\underline{w}-\underline{v}-\underline{u})=5-3.5+13-3.5+7=18$$
$$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{18}$$
$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2\underline{w}\cdot(\underline{w}-\underline{v}-\underline{u})=2\cdot5-2\cdot3.5=3$$
$$\cos(\angle ABC)=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{3}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{10}}{20}\to\angle ABC=80.9°$$

ב. משוואת המישור π :

נתון : $A(0,2,3)\quad B(2,6,3)$

מישור π מאונך ל-AB ועובר ב-B.

$$\overrightarrow{AB}=(2,4,0)\to 2x+4y+D=0$$
$$2\cdot2+4\cdot6+D=0$$
$$D=-28$$
$$\pi: 2x+4y-28=0$$
$$\pi: x+2y-14=0$$

ג. הזווית בין הישר BC ומישור π :

$\overrightarrow{AB}$ ניצב ל-π. נסמן α הזווית בין BC ל-π.

$90-\alpha$ הזווית בין AB ל-BC.

$$\angle ABC=90°-\alpha$$
$$80.9=90°-\alpha$$
$$\alpha=9.1°$$

מספרים מרוכבים, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

שאלה מספר 4

א.

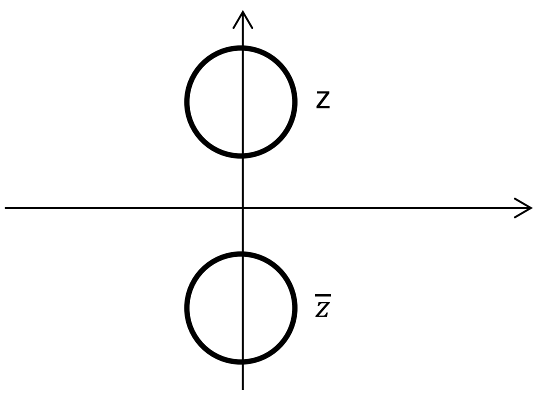
(1) סרטוט:

$|z-3i|=1$

$$|x+(y-3)i|=1$$

$$x^2+(y-3)^2=1$$

מעגל שמרכזו M(0.3) ורדיוסו R=1.



(2) המיקום הגאומטרי של $\overline{z}$:

$\overline{z}$ – אותם ערכי x, ערכי y הפוכים.

(3) המרחק בין z_0 והנקודה המייצגת את $\overline{z}_0$:

$$z_0=1+iy$$

$$\overline{z}_0=1-iy$$

מכיוון ש-z_0 נמצא על המקום הגאומטרי (1) הוא מיוצג ע״י הנקודה (1,3). $\overline{z}_0$ יהיה (1,-3) והמרחק ביניהם הוא 6.

ב.

$$g'(x) = -2f(x)$$

(1) איזה גרף הוא של איזו פונקציה:

גרף מספר 1 מתאים ל-f(x). גרף מספר 2 מתאים ל-g'(x).

נימוק: עבור כל x ערכה של g'(x) נגדי וכפול מערכה של f(x).

(2) עבור אילו ערכים של x הפונקציה f(x) מעל הגרף של g(x):

$$g'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$g_{(0.5)} = e^{-0.25}$$

מהנתון בסעיף (1):

$$f(x) = -\frac{1}{2}g'(x) = xe^{-x^2}$$

בנוסף:

$$\int g'(x)dx = g(x) + c$$

$$\int -\underbrace{2xe^{(-x^2)}}_{\text{נגזרת פנימית}} dx = e^{-x^2} + c$$

למציאת c נציב את הנתון עבור $g(0.5)$:

$$e^{-(0.5)^2} + c = e^{-0.25} \rightarrow \quad c = 0$$

$$g(x) = e^{-x^2}$$

למציאת ערכי *x* עבורם *f(x)* מעל *g(x)* נסתור:

$$f(x) - g(x) > 0$$

$$xe^{-x^2} - e^{-x^2} > 0 \quad \overline{: e^{-x^2}}$$

$$x - 1 > 0$$

$$x > 1$$

שאלה מספר 5

א.

$$f'(x)=\frac{2x^{\frac{1}{3}}-2}{x^{\frac{1}{3}}}$$

(1) תחומי העלייה והירידה של *f(x)*:

$$f'(x)=0\rightarrow\ \ 2x^{\frac{1}{3}}-2=0$$

$$x^{\frac{1}{3}}=1\rightarrow x=1$$

f(x) עולה כאשר $x<0$ או כאשר $x>1$. בתחום זה הנגזרת חיובית.

f(x) יורדת כאשר $0<x<1$ בתחום זה הנגזרת שלילית.

(2) תחומי הקעירות של הפונקציה *f(x)*:

לפונקציית הנגזרת אין נקודת קיצון, לכן אין נקודה החשודה כנקודת פיתול. מכיוון שלכל *x* בתחום הגדרתה *f''(x)* עולה (הנגזרת השנייה חיובית) הפונקציה קעורה כלפי מעלה עבור כל *x*.

ב. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה והצירים:

נתון: $f_{(1)}=-1$

נמצא אם הפונקציה *f(x)*:

$$\int\left(\frac{2x^{\frac{1}{3}}-2}{x^{\frac{1}{3}}}\right)dx=\int\left(2-2x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=2x-2\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right)+c$$

$$f(x)=2x-3x^{\frac{2}{3}}+c$$

מהנתון:

$$2\cdot1-3^{\frac{2}{3}}+c=-1$$

$$c=0$$

כלומר: $f(x)=2x-3x^{\frac{2}{3}}$

נקודות חיתוך עם הצירים:

$$x = 0 \quad f_0 = 0$$

$$2x - 3x^{\frac{2}{3}} = 0$$

$$x^2(8x - 27) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{27}{8}$$

נקודות: $(0,0), \left(\frac{27}{8}, 0\right)$

ג. איזה גרף מתאר את הפונקציה *f(x)*:

הגרף שמתאר את *f(x)* יהיה גרף מספר *III*.

נימוק: *f(x)* קעורה כלפי מעלה עבור כל *x* . *f(x)* מוגדרת לכל *x*. ל-*f(x)* נקודת מינימום.